Remerciements

Laurent Manivel m'a accompagné pendant ces quatre années avec tant de gentillesse et de patience. Il a su s'adapter à mon rythme de travail et il m'a guidé, toujours compréhensif, jusqu'à l'accomplissement de ce chemin mathématique. Je le remercie pour la confiance qu'il m'a accordée et pour ses encouragements que j'ai eu l'occasion de pleinement apprécier pendant cette dernière année.

Je remercie vivement Olivier Debarre pour avoir accepté de rapporter sur ma thèse et pour sa relecture très attentive du manuscrit. Ses remarques et suggestions ont beaucoup contribué à la lisibilité du texte.

Je suis également très reconnaissant à Patrick Polo d'avoir accepté de faire un rapport sur ce texte. Je le remercie particulièrement pour sa relecture détaillée et pour ses commentaires très pertinents, surtout sur le chapitre quatrième.

Michel Brion a plusieurs fois éclairé ma lanterne en répondant avec bienveillance à mes questions et me fait aujourd'hui l'honneur de participer à ce jury. Je lui adresse mes remerciements chaleureux.

Je remercie également Emmanuel Peyre pour son aide bibliographique au chapitre deuxième et pour avoir accepté de prendre part au jury.

Un grand merci aux personnels administratifs de l'Institut Fourier pour leur disponibilité et leur efficacité souriante. Merci Arlette, Corinne, Brigitte, Françoise, Mahjoub, Janick, Marie.

Ces quatre années n'aurait sûrement pas été si agréables sans mes collègues de l'Institut Fourier et mes amis mathématiciens ou non. Merci pour tout à Pierre-Emmanuel et Claudine, David et Florence, Frank, Adrien, Toni, Maxime, Franck, Alice, Vincent, Bertrand, Catriona, Fabrice, Amaël, Manu, Evgheni.

Merci George et Tefa, Mylène, Lumi, François, Alexandros, Rory et Rosanna pour nos évasions glaciaires et autres.

Pendant tout ce temps ma famille était là, même si très loin géographiquement, et m'a apporté son soutien indispensable. Je les remercie de tout mon coeur.

Mika, merci...

Introduction

Le présent travail est consacré à l'étude d'une classe de variétés projectives avec action de groupe qui sont étroitement liées aux grassmanniennes et variétés de drapeaux symplectiques.

Soit F un espace vectoriel complexe de dimension paire muni d'une forme antisymétrique non dégénérée ω. Un sous-espace de F est appelé isotrope si la restriction de la forme ω à ce sous-espace est nulle ; l'ensemble $G_\omega(k, F)$ des sous-espaces isotropes de dimension k de F est une sous-variété de la grassmannienne des sous-espaces de dimension k de F qui est appelée *grassmannienne symplectique*. Cette variété est munie naturellement d'une action transitive du groupe des transformations linéaires de F qui préservent ω, qui est le *groupe symplectique* $\mathrm{Sp}(F)$; plus généralement, le groupe symplectique agit sur les variétés de drapeaux – c'est-à-dire de chaînes de sous-espaces emboîtés – isotropes de F, en particulier sur la *variété de drapeaux symplectiques* $\mathbb{F}_\omega(F)$ qui est la variété des drapeaux isotropes maximaux, et l'action est toujours transitive. Puisque le groupe symplectique est un groupe semi-simple complexe, ceux-ci sont des exemples particuliers de variétés de drapeaux généralisées, qui sont par définition les variétés projectives homogènes d'un groupe semi-simple complexe. L'étude des grassmanniennes et des variétés de drapeaux symplectiques est donc un cas particulier de l'étude des variétés de drapeaux généralisées qui est un domaine étudié depuis longtemps et auquel est consacrée une très vaste littérature.

Le point de départ du présent texte est la question suivante : que se passe-t-il lorsque l'on remplace F par un espace E de dimension *impaire* ?

Précisons cette question. Remarquons qu'en faisant ce changement, la forme ω sur E ne peut plus être non dégénérée puisque le rang d'une forme antisymétrique est toujours un nombre pair ; on remplace alors la condition ω non dégénérée par une condition de généricité, qui est « ω est de rang maximal ». On peut toujours considérer, en utilisant formellement les mêmes définitions que ci-dessus, des variétés $G_\omega(k, E)$ – que l'on appelle *grassmanniennes symplectiques impaires* – et des *variétés de drapeaux symplectiques impaires* $\mathbb{F}_\omega(E)$, munies de l'action du *groupe symplectique impair* $\mathrm{Sp}(E)$.

La question ci-avant devrait alors être prise au sens suivant : dans quelle mesure les objets $G_\omega(k, E)$, $\mathbb{F}_\omega(E)$, $\mathrm{Sp}(E)$ ont-ils des propriétés similaires à celles de $G_\omega(k, F)$, $\mathbb{F}_\omega(F)$, $\mathrm{Sp}(F)$?

Le groupe symplectique impair n'est pas un groupe semi-simple, ni réductif, ce qui nous sort donc du domaine des variétés de drapeaux généralisées. De plus, les grassmanniennes symplectiques impaires, et en général les variétés de drapeaux symplectiques impaires, ne sont pas homogènes sous l'action du groupe symplectique impair. Cependant, selon Proctor qui a introduit le groupe symplectique impair dans [Pro88] et [Pro86], le bon point de vue à avoir sur le groupe symplectique impair est que celui-ci aurait dû se retrouver parmi les groupes semi-simples, mais qu'il a en quelque sorte échappé à la classification. Sa perspective est néanmoins purement algébrique, Proctor énonçant ce principe à la suite de l'étude d'une classe de représentations du groupe symplectique impair. Nous adoptons un point de vue similaire, mais dans une optique plus géométrique, en démontrant dans ce travail que les grassmanniennes et les variétés de drapeaux symplectiques impaires se comportent dans de nombreuses situations comme des variétés homogènes. Notamment, nous illustrons ceci par des résultats concernant $G_\omega(k, \mathbb{C}^N)$ ou $\mathbb{F}_\omega(\mathbb{C}^N)$ qui s'énoncent de la même manière aussi pour $N = 2n$ que pour $N = 2n + 1$. Nous montrons par exemple l'énoncé suivant :

Théorème. *Le groupe d'automorphismes de $G_\omega(k, \mathbb{C}^N)$ est le groupe adjoint $\mathrm{PSp}(\mathbb{C}^N)$.*

Un autre exemple est un théorème de type Borel-Weil pour le groupe symplectique impair qui s'intègre très bien sous un énoncé commun avec le théorème de Borel-Weil classique pour le groupe symplectique :

Théorème. *Soit N un entier et $n = [(N-1)/2]$. Soit $\lambda = a_0\omega_0 + \cdots + a_n\omega_n$, $a_0, \ldots, a_n \geqslant 0$ un poids dominant de $\mathrm{Sp}(\mathbb{C}^N)$; soit L_λ le fibré en droites sur $\mathbb{F}_\omega(\mathbb{C}^N)$*

$$L_\lambda = (\det T_1^*)^{\otimes a_0} \otimes (\det T_2^*)^{\otimes a_1} \otimes \cdots \otimes (\det T_{n+1}^*)^{\otimes a_n}$$

où T_i est le fibré tautologique de rang i. Alors on a un isomorphisme de $\mathrm{Sp}(\mathbb{C}^N)$-modules

$$H^0(\mathbb{F}_\omega(\mathbb{C}^N), L_\lambda) \simeq (S_{\langle\lambda\rangle}\mathbb{C}^N)^*,$$

où $S_{\langle\lambda\rangle}\mathbb{C}^N$ est la construction de Weyl.

Dans [Pro88], Proctor construit des modules pour le groupe symplectique impair et détermine leurs caractères par une formule à la Weyl ; le dénominateur de cette formule peut s'exprimer de deux manières différentes, l'égalité ainsi obtenue étant une nouvelle identité de type Vandermonde qui relie le groupe de Weyl de type D_{n+1} et le système de racines non réduit BC_n, qui est le système de racines du groupe symplectique impair Sp_{2n+1}. Ceci inaugure une série de « coïncidences » qui font que certaines quantités associées au groupe symplectique impair sont les mêmes que des quantités analogues associées au groupe orthogonal pair. Nous en obtenons d'autres dans cette thèse, qui se trouvent être des cas particuliers de la suivante :

Théorème. *La variété de drapeaux symplectiques impaire a la même algèbre de cohomologie que la variété de drapeaux de type D_{n+1}*

$$H^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1)) \simeq H^*(\mathbb{F}_Q(2n+2)).$$

Nous déduisons ce résultat d'une présentation à la Borel de l'anneau de cohomologie équivariante de la variété de drapeaux symplectiques impaire. Notre étude de la cohomologie équivariante de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ aboutit également à une formule de Chevalley-Pieri pour le produit d'une classe de Schubert équivariante par la classe d'un diviseur de Schubert.

Enfin, un exemple classique où l'on voit apparaître des grassmanniennes symplectiques impaires, et qui constitue ainsi une motivation pour leur étude, est X_{12}, la variété de Fano de dimension 3, d'indice 1 et genre 12 construite par Mukai. Elle est définie comme la variété des 3-plans de $\mathbb{C}^7$ isotropes par rapport à 3 formes antisymétriques génériques $\omega, \omega', \omega'' \in \Lambda^2\mathbb{C}^7$, c'est-à-dire que c'est une intersection de trois grassmanniennes symplectiques impaires

$$X_{12} = G_\omega(3, \mathbb{C}^7) \cap G_{\omega'}(3, \mathbb{C}^7) \cap G_{\omega''}(3, \mathbb{C}^7).$$

Un résultat de Mukai montre que toute variété de Fano de dimension 3, d'indice 1 et de genre 12 est isomorphe à une telle variété X_{12}.

Table des matières

1 Le groupe symplectique impair **5**

1.1 Définition et propriétés 5

1.1.1 Un autre groupe symplectique impair 12

2 Grassmanniennes symplectiques impaires **15**

2.1 Généralités 15

2.2 Variétés de Schubert 18

2.2.1 Cellules de Schubert 18

2.2.2 Variétés de Schubert 21

2.2.3 Le polynôme de Poincaré de $G_\omega(k, 2n+1)$ 22

2.2.4 Groupe de Picard 25

2.3 Le groupe d'automorphismes 27

2.3.1 Une première approche 27

2.3.2 La deuxième approche 36

3 Variétés de drapeaux symplectiques impaires **47**

3.1 Définition et premières propriétés 47

3.2 Sous-variétés de Schubert 52

3.2.1 Le polynôme de Poincaré de la variété de drapeaux $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ 57

4 Un théorème de Borel-Weil **65**

4.1 La construction de Shtepin 66

4.1.1 Le modèle de Želobenko 68

4.1.2 Retour sur la construction de Shtepin 73

4.2 Le théorème de Borel-Weil 80

4.2.1 Les Sp_{2n+1}-modules de Proctor 88

5 Cohomologie équivariante **93**

5.1 Cohomologie équivariante 93

5.2 cohomologie équivariante de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ 99

5.3 Classes de Schubert équivariantes 107

5.3.1 Généralités 107

5.3.2 Opérateurs de différences divisées 113

5.3.3 Variétés de Schubert minimales 117

5.3.4 Une formule de Chevalley-Pieri équivariante pour $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ 121

5.3.5 Présentation de Borel de $H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$ et cohomologie ordinaire de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ 125

A Rappels **127**
A.1 Définitions de base 127
A.2 Cellules et variétés de Schubert 130
A.2.1 Dans la grassmannienne symplectique $G_\omega(k, 2n)$ 130
A.2.2 Dans la variété de drapeaux symplectiques $\mathbb{F}_\omega(2n)$ 132

Chapitre 1

Le groupe symplectique impair

1.1 Définition et propriétés

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension impaire $2n+1$ et $\omega : E \otimes E \to \mathbb{C}$ une forme bilinéaire antisymétrique générique sur E ; le terme « générique » est à prendre au sens de la topologie de Zariski sur l'espace affine $\Lambda^2 E^*$.

Définition 1.1.1. On appelle *groupe symplectique impair* (d'ordre $2n+1$) le stabilisateur de ω dans $\mathrm{GL}(E)$ pour l'action canonique de $\mathrm{GL}(E)$ dans $\Lambda^2 E^*$. On le note Sp_{2n+1}.

Autrement dit le groupe symplectique impair est le sous-groupe des transformations linéaires $g \in \mathrm{GL}(E)$ qui vérifient $\omega(gu, gv) = \omega(u, v)$, pour tous $u, v \in E$. Cette définition, qui est la plus naturelle possible pour un objet analogue en dimension impaire au groupe symplectique, a vraisemblablement été introduite par Proctor dans [Pro86] (cf. aussi ses remarques dans [Pro88]).

Montrons que modulo une conjugaison dans $\mathrm{GL}(E)$, Sp_{2n+1} ne dépend pas du choix de ω (ce qui nous permet, entre autres, d'utiliser la notation Sp_{2n+1} qui ne tient pas compte de ω). En effet, l'hypothèse de généricité de ω signifie que l'application induite $\omega : E \to E^*$ est de rang maximal – c'est à dire de rang $2n$, puisque ω ne peut pas être non dégénérée. Cette application a alors un noyau de dimension 1 qu'on note R et qui n'est rien d'autre que l'orthogonal $E^\perp$. Soit e_0 un générateur de R et $F \subset E$ un supplémentaire de R dans E, c'est à dire $E = R \oplus F$. La restriction de ω à F est alors non dégénérée donc il existe dans F une base $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ symplectique par rapport à $\omega|_F$. Alors dans la base $\{e_0, \ldots, e_{2n}\}$ de E la matrice de ω est

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & & & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \iddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & & \\ 0 & & & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \iddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & -1 & & & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

c'est à dire pour $u = \sum_{i=0}^{2n} u_i e_i$, $v = \sum_{i=0}^{2n} v_i e_i$ on a

$$\omega(u, v) = \sum_{i=1}^{n} (u_i v_{2n+1-i} - u_{2n+1-i} v_i). \tag{1.2}$$

Par analogie avec la terminologie employée pour $\mathbb{C}^{2n}$ muni d'une forme symplectique, on continue d'appeler *symplectique* une telle base. L'existence d'une base symplectique par rapport à ω signifie que les formes antisymétriques de rang maximal sur E forment une orbite de $\mathrm{GL}(E)$. Leurs stabilisateurs dans $\mathrm{GL}(E)$ sont alors conjugués et donc Sp_{2n+1} est bien défini à une conjugaison près.

Dans toute la suite on ne considérera sur E qu'une seule forme antisymétrique, ω ; on pourra donc utiliser la notation Sp_{2n+1} pour faire référence à son stabilisateur sans qu'il y ait ainsi aucune ambiguïté.

On fixe désormais une base symplectique $\{e_0, \dots, e_{2n}\}$ et une décomposition $E = R \oplus F$ comme ci-dessus ; on identifie ainsi $\mathrm{GL}(E)$ et le groupe des matrices inversibles $\mathrm{GL}(2n+1, \mathbb{C})$. On a alors

$$\mathrm{Sp}_{2n+1} = \{g \in \mathrm{GL}(2n+1, \mathbb{C}) \mid {}^t g \Omega g = \Omega\}. \tag{1.3}$$

Proposition 1.1.2. Sp_{2n+1} *est un sous-groupe fermé de* $\mathrm{GL}(2n+1, \mathbb{C})$. *Il est contenu dans le sous-groupe parabolique*

$$\{g \in \mathrm{GL}(2n+1, \mathbb{C}) \mid g(R) = R\}.$$

PREUVE. L'action de $\mathrm{GL}(2n+1, \mathbb{C})$ dans $\Lambda^2(\mathbb{C}^{2n+1})^*$ est algébrique et Sp_{2n+1} est un sous-groupe d'isotropie donc il est fermé. On peut également remarquer que Sp_{2n+1} est défini par les équations (1.3) qui sont polynomiales. Pour la seconde affirmation il suffit de noter que Sp_{2n+1} préserve l'orthogonalité donc en particulier il stabilise $E^\perp = R$, le noyau de ω. ∎

Un élément du sous-groupe parabolique $\{g \in \mathrm{GL}(2n+1, \mathbb{C}) \mid g(R) = R\}$ s'écrit par rapport à la décomposition $E = R \oplus F$ comme

$$g = \begin{pmatrix} \lambda & \ell \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $a \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{C})$, $\ell \in \mathbb{C}^{2n}$. Pour $u = u_0 e_0 + u'$, $v = v_0 e_0 + v'$, $u', v' \in F$ on a alors $\omega(gu, gv) = \omega(au', av')$, autrement dit g préserve ω si et seulement si a préserve la restriction de ω à F. Cela démontre l'affirmation suivante :

Proposition 1.1.3. Sp_{2n+1} *est le groupe des matrices* $g \in \mathrm{GL}(2n+1, \mathbb{C})$ *qui sont de la forme*

$$g = \begin{pmatrix} \lambda & \ell \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

avec $a \in \mathrm{Sp}_{2n} \subset \mathrm{GL}(2n, \mathbb{C})$.

On identifie ainsi plusieurs sous-groupes de Sp_{2n+1}. Premièrement, on a $\mathrm{Sp}_{2n} \subset \mathrm{Sp}_{2n+1}$ via l'application

$$a \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

et de manière générale, le choix d'une base symplectique ayant été fait, Sp_{2n} vu comme sous-groupe de Sp_{2n+1} sera toujours l'image de ce plongement. On a ensuite le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ plongé via

$$\lambda \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et, enfin, les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui forment un sous-groupe isomorphe au groupe additif $(\mathbb{C}^{2n}, +)$, qu'on peut aussi identifier au dual F^*. On le note U.

Proposition 1.1.4. *U est un sous-groupe distingué de Sp_{2n+1} et ce dernier est le produit semi-direct $(\mathbb{C}^* \times \mathrm{Sp}_{2n}) \ltimes U$ de ses sous-groupes $\mathbb{C}^* \times \mathrm{Sp}_{2n}$ et U.*

Preuve. Rappelons qu'un groupe G est le produit semi-direct de deux de ses sous-groupes H et N, N distingué, si H et N engendrent G et $H \cap N = (1)$; on le note $G = H \ltimes N$. Tout élément g de G s'écrit alors de manière unique $g = g_H g_N$ avec $g_H \in H$, $g_N \in N$. Dans la catégorie des groupes algébriques on demande qu'en plus H et N soient fermés dans G et que les applications $g \mapsto g_H$, $g \mapsto g_N$ soient régulières.

Dans notre cas commençons par remarquer que U et $\mathbb{C}^* \times \mathrm{Sp}_{2n}$ engendrent Sp_{2n+1} puisque

$$\begin{pmatrix} \lambda & \ell \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda^{-1}\ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note ensuite que $\mathbb{C}^* \times \mathrm{Sp}_{2n}$ normalise U puisque

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \ell a^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et cela entraîne que U est distingué. Pour conclure il ne nous reste qu'à remarquer que $(\mathbb{C}^* \times \mathrm{Sp}_{2n}) \cap U = (1)$. ■

Puisque $\mathbb{C}^* \times \mathrm{Sp}_{2n}$ et U sont connexes, on déduit aussitôt le corollaire suivant :

Corollaire 1.1.5. *Sp_{2n+1} est connexe et de dimension $(n+1)(2n+1)$.*

Proposition 1.1.6. *U est le radical unipotent de Sp_{2n+1}. En particulier, le groupe Sp_{2n+1} n'est pas réductif.*

Preuve. U est un sous-groupe unipotent, connexe et distingué de Sp_{2n+1}, il est donc contenu dans le radical unipotent R_u de Sp_{2n+1}. D'autre part, le quotient $\mathrm{Sp}_{2n+1}/U \simeq \mathbb{C}^* \times \mathrm{Sp}_{2n}$ est réductif, donc l'image de R_u dans ce quotient est triviale, et donc $R_u = U$. ■

Faisons maintenant la remarque très simple suivante : si dans un produit semi-direct $G = H \ltimes N$ un sous-groupe $G_1 \subset G$ contient l'un des facteurs, $G_1 \supset H$ (respectivement $G_1 \supset N$), alors il est à son tour un produit semi-direct $G_1 = H \ltimes (G_1 \cap N)$ (respectivement $G_1 = (G_1 \cap H) \ltimes N$). Cela nous sera utile dans la suite.

On détermine maintenant les sous-groupes de Borel de Sp_{2n+1}. Il suffit d'en préciser un, les autres en sont des conjugués. Un candidat naturel est le sous-groupe de Sp_{2n+1} formé par les matrices triangulaires supérieures, c'est-à-dire que $B = \mathrm{Sp}_{2n+1} \cap B_0$ où $B_0 \subset \mathrm{GL}(2n+1, \mathbb{C})$ est le sous-groupe de Borel de $\mathrm{GL}(2n+1, \mathbb{C})$ qui préserve le drapeau standard $\langle e_0 \rangle \subset \langle e_0, e_1 \rangle \subset \cdots \subset \langle e_0, \ldots, e_{2n} \rangle$.

Proposition 1.1.7. *B est un sous-groupe de Borel de Sp_{2n+1}.*

PREUVE. B est résoluble puisque c'est un sous-groupe de B_0 qui est résoluble. Il est formé par les matrices

$$\begin{pmatrix} \lambda & \ell \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

avec $a \in \mathrm{Sp}_{2n}$ triangulaire supérieure. En particulier, B contient U et donc B est un produit semi-direct $B = [B \cap (\mathbb{C}^* \times \mathrm{Sp}_{2n})] \ltimes U$. Maintenant, $B \cap (\mathbb{C}^* \times \mathrm{Sp}_{2n}) = \mathbb{C}^* \times B_1$ où B_1 est le sous-groupe de Borel de Sp_{2n} qui préserve le drapeau isotrope $\langle e_1 \rangle \subset \langle e_1, e_2 \rangle \subset \cdots \subset \langle e_1, \ldots, e_{2n} \rangle$. On en déduit que B est connexe, donc il est contenu dans un sous-groupe de Borel $\tilde{B}$. Celui-ci est également un produit semi-direct $\tilde{B} = [\tilde{B} \cap (\mathbb{C}^* \times \mathrm{Sp}_{2n})] \ltimes U$; or $\tilde{B} \cap (\mathbb{C}^* \times \mathrm{Sp}_{2n})$ est connexe (puisque $\tilde{B}$ et U le sont) et résoluble et contient $\mathbb{C}^* \times B_1$. Il s'ensuit que $\tilde{B} \cap (\mathbb{C}^* \times \mathrm{Sp}_{2n}) = \mathbb{C}^* \times B_1$, c'est-à-dire $\tilde{B} = B$. ■

Soit maintenant T le sous-groupe des matrices diagonales qui appartiennent à Sp_{2n+1}, c'est-à-dire $T = \mathrm{Sp}_{2n+1} \cap T_0$ où $T_0 \subset \mathrm{GL}(2n+1, \mathbb{C})$ est le sous-groupe de toutes les matrices diagonales inversibles. Autrement dit les éléments de T sont les matrices de la forme

$$\mathrm{diag}(t_0, t_1, \ldots, t_n, t_n^{-1}, \ldots, t_1^{-1}), \quad t_0, \ldots, t_n \in \mathbb{C}^*.$$

Proposition 1.1.8. *T est un tore maximal de* Sp_{2n+1}.

PREUVE. On a $T = \mathbb{C}^* \times T_1$ où $T_1 = \mathrm{Sp}_{2n} \cap T_0$ sont les matrices diagonales de Sp_{2n}. On vérifie que T est égal à son centralisateur $C_{\mathrm{Sp}_{2n+1}}(T)$. Soit

$$\begin{pmatrix} \lambda & \ell \\ 0 & a \end{pmatrix} \in C_{\mathrm{Sp}_{2n+1}}(T).$$

Alors

$$\begin{pmatrix} \lambda & \ell \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \ell \\ 0 & a \end{pmatrix}, \text{ pour tout } (t, d) \in \mathbb{C}^* \times T_1$$

revient à

$$ad = da, \ \ell d = t\ell, \text{ pour tout } (t, d) \in \mathbb{C}^* \times T_1$$

et donc $a \in T_1 = C_{\mathrm{Sp}_{2n}}(T_1)$ et $\ell = 0$. ■

Par la démonstration précédente, on a $C_{\mathrm{Sp}_{2n+1}}(T) = T$; par conséquent le groupe de Weyl $N_{\mathrm{Sp}_{2n+1}}(T)/C_{\mathrm{Sp}_{2n+1}}(T)$ de Sp_{2n+1} – où $N_{\mathrm{Sp}_{2n+1}}(T)$ désigne le normalisateur de T dans Sp_{2n+1} – est le quotient $N_{\mathrm{Sp}_{2n+1}}(T)/T$.

Proposition 1.1.9. *L'inclusion* $\mathrm{Sp}_{2n} \subset \mathrm{Sp}_{2n+1}$ *induit un isomorphisme du groupe de Weyl de* Sp_{2n+1} *sur le groupe de Weyl de* Sp_{2n}.

PREUVE. Calculons d'abord le normalisateur $N_{\mathrm{Sp}_{2n+1}}(T)$. Notons comme dans la démonstration de la proposition précédente T_1 le tore maximal de Sp_{2n} formé par les matrices diagonales, de sorte que $T = \mathbb{C}^* \times T_1$. Soit

$$\begin{pmatrix} \lambda & \ell \\ 0 & a \end{pmatrix} \in N_{\mathrm{Sp}_{2n+1}}(T).$$

Ceci signifie que quelque soit $(t, d) \in \mathbb{C}^* \times T_1$ il existe $(t', d') \in \mathbb{C}^* \times T_1$ tel que

$$\begin{pmatrix} \lambda & \ell \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t' & 0 \\ 0 & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \ell \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

égalité qui est équivalente à

$$\begin{cases} \lambda t = t'\lambda \\ \ell d = t'\ell \\ ad = d'a. \end{cases}$$

On a donc, $\ell = 0$ et $a \in N_{\mathrm{Sp}_{2n}}(T_1)$, autrement dit $N_{\mathrm{Sp}_{2n+1}}(T) = \mathbb{C}^* \times N_{\mathrm{Sp}_{2n}}(T_1)$. Il s'ensuit que $N_{\mathrm{Sp}_{2n+1}}(T)/T \simeq N_{\mathrm{Sp}_{2n}}(T_1)/T_1$. ■

Proposition 1.1.10. *Le centre de* Sp_{2n+1} *est le sous-groupe à deux éléments* $Z(\mathrm{Sp}_{2n+1}) = \{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\}$.

Preuve. Deux éléments de Sp_{2n+1}

$$\begin{pmatrix} \lambda & \ell \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda' & \ell' \\ 0 & a' \end{pmatrix}, \quad \lambda, \lambda' \in \mathbb{C}^*, \ell, \ell' \in \mathbb{C}^{2n}, a, a' \in \mathrm{Sp}_{2n}$$

commutent si et seulement si

$$\lambda\ell' + \ell a' = \lambda'\ell + \ell' a \text{ et } aa' = a'a.$$

Si

$$\begin{pmatrix} \lambda & \ell \\ 0 & a \end{pmatrix} \in Z(\mathrm{Sp}_{2n+1})$$

alors, en particulier, $a \in Z(\mathrm{Sp}_{2n}) = \{\pm\mathrm{Id}\}$ et la première condition, que l'on réécrit $(a - \lambda\mathrm{Id})\ell' = \ell a' - \lambda'\ell$, impose $\ell = 0$ et $a = \lambda\mathrm{Id}$ ce qui achève la preuve. ■

Un lien avec Sp_{2n+2}

1.1.11. On décrit maintenant une construction qui relie Sp_{2n+1} et Sp_{2n+2} et qui va être utilisée dans les chapitres suivantes (cf. les sections 2.2.1 et 3.2). Plongeons $E = \mathbb{C}^{2n+1}$ dans $\mathbb{C}^{2n+2}$ et choisissons une forme symplectique $\tilde{\omega}$ sur $\mathbb{C}^{2n+2}$. La restriction de $\tilde{\omega}$ à E est de rang maximal puisque son noyau $E^{\perp_{\tilde{\omega}}} \subset E$ est de dimension 1 ; on peut donc supposer, modulo une conjugaison, que $\tilde{\omega}|_E = \omega$. D'une autre façon, on peut définir $\tilde{\omega}$ en prenant un élément e_{2n+1} dans $\mathbb{C}^{2n+2} \setminus E$ et en décrétant que la base $\{e_0, \ldots, e_{2n+1}\}$ est symplectique. Supposons une telle base fixée et considérons dans le groupe Sp_{2n+2} (qui préserve $\tilde{\omega}$) le sous-groupe parabolique P qui fixe l'espace $\mathbb{C}e_0 = R$. Tout élément $g \in P$ fixe alors également l'orthogonal $R^{\perp_{\tilde{\omega}}} = E$, et sa restriction $g|_E$ préserve $\tilde{\omega}|_E = \omega$, autrement dit, $g|_E \in \mathrm{Sp}_{2n+1}$.

Proposition 1.1.12. *Le morphisme* $P \to \mathrm{Sp}_{2n+1}$ *donné par* $g \mapsto g|_E$ *est surjectif. L'image par ce morphisme du sous-groupe de Borel de* Sp_{2n+2} *qui préserve le drapeau* $\langle e_0 \rangle \subset \langle e_0, e_1 \rangle \subset \cdots \subset \langle e_0, \ldots, e_{2n+1} \rangle$ *est le sous-groupe de Borel* $B \subset \mathrm{Sp}_{2n+1}$ *défini plus haut.*

Preuve. Un élément $g \in P$ est une matrice de la forme

$$g = \begin{pmatrix} \lambda & \ell_1 & \cdots & \ell_{2n} & \nu \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1\,2n} & c_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & a_{2n\,1} & \cdots & a_{2n\,2n} & c_{2n} \\ 0 & & \cdots & 0 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \ell & \nu \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^*$, $\nu \in \mathbb{C}$, $a = (a_{i,j}) \in \mathrm{Sp}_{2n}$, et $\ell, c \in \mathbb{C}^{2n}$. Cette matrice est dans Sp_{2n+2} si et seulement si ses colonnes

$$g(e_0), \ldots, g(e_{2n+1})$$

forment une base symplectique ; puisque $g|_E \in \mathrm{Sp}_{2n+1}$, cela revient à

$$\begin{array}{ll} \tilde{\omega}(g(e_0), g(e_{2n+1})) = 1 & \\ \tilde{\omega}(g(e_i), g(e_{2n+1})) = 0 & \text{pour tout } 1 \leqslant i \leqslant 2n. \end{array}$$

La première condition équivaut à $\lambda\mu = 1$. Les autres s'écrivent sous forme matricielle

$$\mu\ell + (c_{2n}, \ldots, c_{n+1}, -c_n, \ldots, -c_1)a = 0 \tag{1.6}$$

et donc c est entièrement déterminé par la donnée de (λ, ℓ, a). Cela démontre la surjectivité du morphisme $P \to \mathrm{Sp}_{2n}$. La seconde affirmation provient d'un résultat plus général pour les groupes algébriques, qui affirme que l'image d'un sous-groupe de Borel par un morphisme surjectif de groupes algébriques connexes est un sous-groupe de Borel ; toutefois, dans notre cas elle se démontre immédiatement, compte tenu du fait que pour que la matrice (1.5) soit triangulaire supérieure il faut et il suffit que a le soit. ■

On a donc une suite exacte courte de groupes algébriques

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow \mathrm{Sp}_{2n+1} \longrightarrow 1$$

où, d'après (1.6), le noyau N est le sous-groupe des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \nu \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_{2n+2}, \quad \nu \in \mathbb{C}. \tag{1.7}$$

Remarque 1.1.13. Cette suite n'est pas scindée, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de plongement $\mathrm{Sp}_{2n+1} \subset P$ tel que la composition $\mathrm{Sp}_{2n+1} \hookrightarrow P \longrightarrow \mathrm{Sp}_{2n+1}$ soit l'identité.

En effet, supposons qu'un tel plongement existe ; l'image du radical unipotent U de Sp_{2n+1} par ce plongement est alors incluse dans le sous-groupe de P formé par les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire dans le radical unipotent P_u de P. Montrons que P_u n'a pas de sous-groupe fermé abélien de dimension strictement plus grande que $n+1$, en particulier il ne peut pas contenir U, qui est de dimension $2n$. Il est plus simple de raisonner au niveau des algèbres de Lie, montrons donc que l'algèbre de Lie de P_u, dont les éléments sont les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \ell & \nu \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \ell, c \in \mathbb{C}^{2n}, \quad \nu \in \mathbb{C}$$

pour lesquelles

$$(c_1, \ldots, c_n, c_{n+1}, \ldots, c_{2n}) = (\ell_{2n}, \ldots, \ell_{n+1}, -\ell_n, \ldots, -\ell_1) \tag{1.8}$$

(cf. A.1.5), n'a pas de sous-algèbre de Lie abélienne de dimension plus grande que $n+1$. Soit

$$\begin{pmatrix} 0 & \ell & \nu \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \ell' & \nu' \\ 0 & 0 & c' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

deux éléments de $Lie(P_u)$, ils commutent si et seulement si $\ell c' = \ell' c$, c'est-à-dire – d'après (1.8) – si

$$\ell J\, {}^t\ell' = \ell' J\, {}^t\ell,$$

où J est la matrice (A.1) d'une 2-forme antisymétrique non dégénérée sur $\mathbb{C}^{2n}$ dans une base symplectique. En conséquence, si $\mathfrak{g} \subset Lie(P_u)$ est une sous-algèbre de Lie abélienne, alors l'image de $\mathfrak{g}$ par la projection

$$\begin{pmatrix} 0 & \ell & \nu \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \ell$$

est un sous-espace isotrope pour la forme symplectique définie par J, cette image est donc de dimension au plus n, ce qui entraîne que $\mathfrak{g}$ est de dimension au plus $n+1$.

Remarque 1.1.14. On peut démontrer que, plus généralement, Sp_{2n+1} ne se plonge pas comme sous-groupe algébrique dans Sp_{2n+2}. Cette affirmation apparaît, sans démonstration, dans [Pro88] ; nous trouvons utile d'en donner une preuve ici.

Supposons que l'on a $\mathrm{Sp}_{2n+1} \subset \mathrm{Sp}_{2n+2}$, autrement dit qu'il existe un Sp_{2n+1}-module fidèle M de dimension $2n+2$ qui est muni d'une forme symplectique fixée par l'action de Sp_{2n+1}. Si $n \geqslant 3$, la décomposition de M comme Sp_{2n}-module en composantes irréductibles est $\mathbb{C}^{2n} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ puisque les seuls Sp_{2n}-modules irréductibles de dimension plus petite que $2n+2$ sont le module trivial $\mathbb{C}$ et la représentation standard $\mathbb{C}^{2n}$. Si $n=2$ ou $n=1$, il y a plusieurs Sp_{2n}-modules fidèles de dimension $2n+2$ qu'on va considérer séparément à la fin ; supposons pour l'instant que $M = \mathbb{C}^{2n} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

Soit $F \subset M$ l'unique Sp_{2n}-sous-module irréductible de M isomorphe à $\mathbb{C}^{2n}$. L'orthogonal $F^\perp$ est aussi un Sp_{2n}-sous-module de M, et puisque F est irréductible on a $F \cap F^\perp = (0)$, donc la restriction $\omega|_F$ est non dégénérée et l'action de Sp_{2n} sur $F^\perp$ est triviale, c'est-à-dire $F^\perp = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ dans la décomposition ci-dessus.

Considérons l'action sur M du radical unipotent U de Sp_{2n+1}. Puisque Sp_{2n} normalise U, l'espace des vecteurs invariants M^U est un Sp_{2n}-sous-module de M. Comme U agit fidèlement dans M, on a $M^U \neq M$; d'autre part, par le théorème de Lie-Kolchin, M^U est de dimension strictement positive. Il s'ensuit que la décomposition de M^U en Sp_{2n}-modules irréductibles est l'une des quatre suivantes : $\mathbb{C}^{2n}$, $\mathbb{C}^{2n} \oplus \mathbb{C}$, $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, ou $\mathbb{C}$. Montrons que M^U est de dimension 1. En effet, si M^U contient $F = \mathbb{C}^{2n} \subset M$ alors U stabilise $F^\perp = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ donc $(F^\perp)^U$ est non trivial, et donc l'image de U dans $\mathrm{Sp}(\omega|_{F^\perp}, F^\perp)$ est incluse dans le sous-groupe unipotent

$$\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ce qui est impossible puisque U est de dimension $2n$ et agit fidèlement dans M. Si $M^U = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} = F^\perp$ alors U préserve F et donc agit trivialement sur F, absurde. Il reste donc que $M^U = \mathbb{C}$; soit e_0 un générateur de M^U. Comme Sp_{2n}-modules, on a

$$M/M^U = M/\mathbb{C}e_0 = \mathbb{C}^{2n} \oplus \mathbb{C} = (F \oplus \mathbb{C}e_0/\mathbb{C}e_0) \oplus (F^\perp/\mathbb{C}e_0).$$

L'espace des invariants $(M/\mathbb{C}e_0)^U$ ne contient pas $F^\perp/\mathbb{C}e_0$ puisque cela signifierait que U préserve $F^\perp$ donc agit trivialement dans F, ce qui est absurde. Comme $(M/\mathbb{C}e_0)^U$ est un Sp_{2n}-module de dimension strictement positive, il reste que $(M/\mathbb{C}e_0)^U = F \oplus \mathbb{C}e_0/\mathbb{C}e_0$. Soit maintenant $\{e_1, \ldots, e_{2n+1}\}$ une base symplectique dans F, et soit e_{2n+2} un élément de $F^\perp$ tel que $\omega(e_0, e_{2n+2}) = 1$ (on peut partir d'une base quelconque $\{e_0, e_{2n+2}\}$ de $F^\perp$, alors $\omega(e_0, e_{2n+2}) \neq 0$ donc quitte à multiplier par un scalaire on peut supposer $\omega(e_0, e_{2n+2}) = 1$) ; alors $\{e_0, e_1, \ldots, e_{2n+1}, e_{2n+2}\}$ est une base symplectique dans M et dans cette base les éléments de U sont des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & \ell & \nu \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \ell, c \in \mathbb{C}^{2n}, \quad \nu \in \mathbb{C},$$

c'est-à-dire que U est un sous-groupe du radical unipotent P_u du sous-groupe parabolique $P \subset \mathrm{Sp}_{2n+2}$ qui fixe $\mathbb{C}e_0$. Or comme expliqué dans la remarque précédente, ceci est impossible.

Considérons maintenant le cas $n = 2$ ou $n = 1$. Pour $n = 2$, les Sp_4-modules fidèles de dimension 6 sont $\mathbb{C}^4 \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, déjà traité, et $\Lambda^2\mathbb{C}^4 = \Lambda^{\langle 2\rangle}\mathbb{C}^4 \oplus \mathbb{C}$. Pour $n = 1$, il y a deux autres Sp_2-modules fidèles de dimension 4 à part $\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$: $\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$ et $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 = \Lambda^2\mathbb{C}^2 \oplus S^2\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \oplus \mathfrak{sp}_2$. On remarque donc que les trois cas à considérer sont tous de la forme $M = N \oplus N^\perp$ où N et $N^\perp$ sont des Sp_{2n}-sous-modules irréductibles de M. Or, par un argument qu'on a déjà utilisé, l'espace des invariants M^U contient alors l'un des sous-modules N ou $N^\perp$, disons N, donc U préserve $N^\perp$ ce qui entraîne que U agit trivialement sur $N^\perp$ et donc U agit trivialement sur M, contradiction.

1.1.1 Un autre groupe symplectique impair

Nous avons vu dans la remarque précédente que le groupe symplectique impair Sp_{2n+1} n'est pas un sous-groupe algébrique du groupe symplectique Sp_{2n+2} ; ceci pourrait être un désavantage, par exemple du point de vue de la théorie des représentations, puisque on ne peut pas restreindre un Sp_{2n+2}-module à Sp_{2n+1}. Gelfand et Zelevinski ont introduit dans [GZ84] une construction qui fournit une série de groupes qui contient les groupes symplectiques classiques et une autre classe de groupes qu'ils appellent groupes symplectiques impairs. Leur construction est la suivante : soit V un espace vectoriel, alors le groupe $\mathrm{GL}(V)$ a une orbite ouverte dans $V^* \oplus \Lambda^2 V^*$ ([GZ84, lemma 1]) qui est l'ensemble

$$\{(\ell, \theta) \mid \ell \neq 0,\ \theta \text{ de rang maximal, } \ker \ell \cap \ker \theta = (0)\}.$$

Les auteurs de [GZ84] définissent alors le groupe $G(V)$ comme étant le sous-groupe d'isotropie de cette orbite ouverte.

Si $V = \mathbb{C}^{2n+1}$ alors on obtient $G(\mathbb{C}^{2n+1}) \simeq \mathrm{Sp}_{2n}$; si $V = \mathbb{C}^{2n+2}$ alors $G(\mathbb{C}^{2n+2})$ est le sous-groupe de Sp_{2n+2} qui fixe un élément non nul de V^* (ou, ce qui revient au même, de V).

Définition 1.1.15. Nous notons $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$ le sous-groupe de Sp_{2n+2} qui fixe l'élément e_0 d'une base symplectique et l'appelons le *groupe symplectique impair intermédiaire.*

Il est clair que, par construction, on a $\mathrm{Sp}_{2n} \subset \widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1} \subset \mathrm{Sp}_{2n+2}$, c'est ce qui justifie l'appellation « intermédiaire »[1].

[1]Qui est différente de celle de Proctor, cf. [Pro88, §1].

Aussi, nous remarquons que $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$ est un sous-groupe du sous-groupe parabolique P considéré au n° 1.1.11, et plus précisément, c'est le sous-groupe des éléments g dont la restriction au sous-espace $e_0^\perp$ est de déterminant 1. Le morphisme de restriction $g \mapsto g|_{e_0^\perp}$ envoie donc le groupe $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$ surjectivement sur le sous-groupe SSp_{2n+1} des éléments de déterminant 1 dans Sp_{2n+1}.

Nous reviendrons sur le groupe $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$ dans le chapitre quatrième, où nous examinerons une classe de $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$-modules introduite par Shtepin ([Sht93]) et leur lien avec certaines représentations de Sp_{2n+1} considérées par Proctor.

Chapitre 2

Grassmanniennes symplectiques impaires

2.1 Généralités

On garde ici les notations du chapitre précédent : E désigne un espace vectoriel complexe de dimension $2n+1$ que l'on munit d'une 2-forme antisymétrique générique ω et où l'on fixe une base symplectique $\{e_0, \dots, e_{2n}\}$, numérotée aussi $\{e_0, e_1, \dots, e_n, e_{\bar{n}}, \dots, e_{\bar{1}}\}$. On introduit dans la définition suivante l'objet central de ce chapitre.

Définition 2.1.1. Pour un entier positif k, on note $G_\omega(k, E)$ la grassmannienne des k-plans isotropes de E, c'est-à-dire

$$G_\omega(k, E) = \{V \subset E \mid \dim V = k,\ \omega(u, v) = 0,\ \text{pour tous } u, v \in V\}\ ;$$

c'est un fermé de la grassmannienne $G(k, E)$ des k-plans de E (cf. la proposition 2.1.4 pour une démonstration). Les variétés $G_\omega(k, E)$ seront appelées *grassmanniennes symplectiques impaires*.

On notera aussi $G_\omega(k, 2n+1)$ au lieu de $G_\omega(k, E)$, sous-entendant que l'on identifie E et $\mathbb{C}^{2n+1}$ par le choix de la base symplectique $\{e_0, \dots, e_{2n}\}$.

2.1.2. Notons que pour un sous-espace V de $\mathbb{C}^{2n+1}$ l'orthogonal $V^\perp$ est de dimension

$$\dim V^\perp = \begin{cases} \operatorname{codim} V & \text{si } e_0 \notin V, \\ \operatorname{codim} V + 1 & \text{si } e_0 \in V. \end{cases}$$

Par conséquent, pour un sous-espace isotrope $V \subset \mathbb{C}^{2n+1}$ on a $\dim V \leqslant n+1$, avec égalité si et seulement si V contient e_0. Ainsi pour $k \geqslant n+2$ la grassmannienne symplectique impaire $G_\omega(k, 2n+1)$ est vide ; on supposera donc désormais que $k \leqslant n+1$.

2.1.3. La grassmannienne symplectique impaire $G_\omega(k, 2n+1)$ est munie de l'action du groupe Sp_{2n+1} définie par restriction de l'action naturelle de $\mathrm{GL}(2n+1, \mathbb{C})$ sur la grassmannienne usuelle $G(k, 2n+1)$. C'est donc une situation tout à fait analogue à celle de la grassmannienne symplectique $G_\omega(k, 2n)$ munie de l'action de Sp_{2n}. Cependant, on peut déjà remarquer qu'à la différence du cas symplectique, l'action de Sp_{2n+1} sur $G_\omega(k, 2n+1)$ n'est pas transitive. En effet, les sous-espaces isotropes $\langle e_0, \ldots, e_{k-1} \rangle$ et $\langle e_{2n-k+1}, \ldots, e_{2n} \rangle$ ne peuvent pas se trouver dans la même orbite de Sp_{2n+1} puisque l'un contient la droite $\mathbb{C}e_0$ alors que l'autre ne la contient pas et Sp_{2n+1} fixe cette droite. La proposition 2.1.5 ci-dessous montre que ceci est la seule obstruction à la transitivité. Nous établissons d'abord le fait suivant :

Proposition 2.1.4. *La grassmannienne symplectique impaire $G_\omega(k, 2n+1)$ est une sous-variété lisse et de dimension $k(2n+1-k)-k(k-1)/2$ de la grassmannienne usuelle $G(k, 2n+1)$.*

PREUVE. On montre que $G_\omega(k, 2n+1)$ est le lieu des zéros d'une section suffisamment générique d'un fibré vectoriel sur la grassmannienne $G(k, 2n+1)$. L'ingrédient principal est alors le théorème de Bertini auquel on fera appel à plusieurs reprises dans la suite et dont il est utile de rappeler ici l'énoncé et la démonstration.

Théorème de Bertini. *Soit $\mathbf{E}$ un fibré vectoriel sur une variété lisse X et $V \subset H^0(X, \mathbf{E})$ un sous-espace de sections globales qui engendre $\mathbf{E}$. Alors ou bien la section générique de V ne s'annule pas, ou bien le lieu des zéros d'une section générique de V est une sous-variété lisse de X de codimension $r = \operatorname{rang} \mathbf{E}$.*

PREUVE DU THÉORÈME DE BERTINI. Considérons la variété d'incidence

$$I = \{(x, s) \in X \times V \mid s(x) = 0\} \subset X \times V.$$

Soit $p : I \to X$ et $q : I \to V$ les projections canoniques sur les deux facteurs. Alors I est le noyau du morphisme d'évaluation $X \times V \to \mathbf{E}$ qui est surjectif par hypothèse, donc I est à son tour un fibré vectoriel sur X, de rang $\dim V - r$, et donc c'est une variété lisse de dimension $\dim V - r + \dim X$.

Supposons maintenant que la section générique de V s'annule, ce qui revient à dire que le morphisme $q : I \to V$ est dominant. Alors par le théorème de lissité générique (on est en caractéristique 0) la fibre générique de q est lisse et de dimension $\dim X - r$. ■

Pour revenir à la proposition (2.1.4), considérons sur la grassmannienne $G(k, 2n+1)$ le fibré $\Lambda^2 T^*$, où T est le fibré tautologique. Pour un sous-espace V de dimension k de $\mathbb{C}^{2n+1}$, au-dessus du point $V \in G(k, 2n+1)$ la fibre de T est V et la fibre de $\Lambda^2 T^*$ est $\Lambda^2 V^*$. Les 2-formes antisymétriques $\Lambda^2(\mathbb{C}^{2n+1})^*$ définissent des sections globales de $\Lambda^2 T^*$, en associant à une forme $\theta \in \Lambda^2(\mathbb{C}^{2n+1})^*$ la section de $\Lambda^2 T^*$ qui au point $V \in G(k, 2n+1)$ prend comme valeur la restriction $\theta|_V \in \Lambda^2 V^*$. Ainsi la section définie par θ s'annule en V si et seulement si V est isotrope par rapport à θ, donc en considérant ω comme section de $\Lambda^2 T^*$ son lieu d'annulation est précisément $G_\omega(k, 2n+1)$. Remarquons que $\Lambda^2 T^*$ est engendré par ses sections globales qui proviennent de $\Lambda^2(\mathbb{C}^{2n+1})^*$, puisque une 2-forme antisymétrique définie sur un sous-espace quelconque $V \subset \mathbb{C}^{2n+1}$ se prolonge à $\mathbb{C}^{2n+1}$ tout entier.[1] Pour conclure il ne nous reste qu'à remarquer que la section ω, générique par définition, s'annule au moins en un point de $G(k, 2n+1)$, par exemple en $\langle e_0, \ldots, e_{k-1} \rangle$. ■

Nous allons nous servir de manière répétée dans la suite du fait suivant : puisque le corps de base est $\mathbb{C}$, grâce au Théorème Principal de Zariski, tout morphisme bijectif $X \to Y$ avec Y normale est un isomorphisme.

Voici maintenant la description des orbites d'une grassmannienne symplectique impaire :

[1]En fait, par le théorème de Bott on a $H^0(G(k, 2n+1), \Lambda^2 T^*) = \Lambda^2(\mathbb{C}^{2n+1})^*$ (cf. le n° 2.3.6 ci-dessous).

Proposition 2.1.5. *Pour $k = n+1$ la grassmannienne symplectique impaire $G_\omega(n+1, 2n+1)$ est isomorphe à la grassmannienne symplectique $G_\omega(n, 2n)$ et elle est donc homogène. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, le groupe symplectique impair a deux orbites sur la grassmannienne symplectique impaire $G_\omega(k, 2n+1)$. L'orbite fermée est*

$$X_0 = \{V \in G_\omega(k, 2n+1) \mid e_0 \in V\}$$

et c'est une variété isomorphe à la grassmannienne symplectique $G_\omega(k-1, 2n)$. L'orbite ouverte est le complémentaire

$$X_1 = \{V \in G_\omega(k, 2n+1) \mid e_0 \notin V\}$$

et est isomorphe au dual du fibré tautologique sur la grassmannienne symplectique $G_\omega(k, 2n)$.

Preuve. Rappelons que l'on désigne par F le sous-espace $\langle e_1, \ldots, e_{2n}\rangle$. Un sous-espace V qui contient e_0 est forcément une somme directe $V = \mathbb{C}e_0 \oplus (V \cap F)$ et alors il est isotrope si et seulement si $V \cap F \subset F$ est isotrope pour $\omega|_F$ qui, rappelons-le, est non dégénérée. Ceci montre que l'application $W \mapsto W \oplus \mathbb{C}e_0$ est un isomorphisme entre la grassmannienne symplectique $G_\omega(k-1, 2n)$ et le fermé X_0. Celui-ci est donc homogène pour le sous-groupe Sp_{2n} de Sp_{2n+1} ; comme il est stable par Sp_{2n+1}, c'est une Sp_{2n+1}-orbite. Notons que les sous-groupes $\mathbb{C}^*$ et U de Sp_{2n+1} agissent trivialement sur X_0.

Montrons maintenant que Sp_{2n+1} agit transitivement sur X_1. Désignons par p la projection $E \to F$ définie par la décomposition $E = \mathbb{C}e_0 \oplus F$. Si V est un sous-espace de $\mathbb{C}^{2n+1}$ qui ne contient pas e_0 alors p induit un isomorphisme $V \to p(V)$; de plus, V est isotrope si et seulement si $p(V) \subset F$ est isotrope pour $\omega|_F$. La projection p induit donc une application

$$p : X_1 \longrightarrow G_\omega(k, 2n) = G_{\omega|_F}(k, F).$$

Soit $V \in X_1$, $V = \langle v_1, \ldots, v_k\rangle$ avec $v_i = \alpha_i e_0 + v_i'$, $v_i' \in F$. Alors $p(V) = \langle v_1', \ldots, v_k'\rangle$ et donc V et $p(V)$ sont conjugués par tout élément du radical unipotent U de Sp_{2n+1} qui envoie $v_i' \mapsto v_i' + \alpha_i e_0$. Un tel élément existe, puisque U s'identifie à F^* et les v_i' sont indépendants. Réciproquement, pour tout $g \in U$ on a $p(g.V) = p(V)$, et donc les orbites de U dans X_1 coïncident avec les fibres de p. En particulier, toute orbite de U dans X_1 coupe $G_\omega(k, 2n) \subset X_1$ et comme Sp_{2n} agit transitivement sur $G_\omega(k, 2n)$, il résulte que Sp_{2n+1} agit transitivement dans X_1.

Soit maintenant T le fibré tautologique sur la grassmannienne symplectique $G_\omega(k, 2n)$; la fibre au point $W \in G_\omega(k, 2n)$ du dual T^* est W^*. À tout élément $\ell \in W^*$, on associe son graphe $\Gamma_\ell \subset W \oplus \mathbb{C} = W \oplus \mathbb{C}e_0 \subset F \oplus \mathbb{C}e_0 = E$ qui est un sous-espace isotrope de E qui ne contient pas e_0 et pour lequel on a $p(\Gamma_\ell) = W$. De manière plus explicite, si $W = \langle w_1, \ldots, w_k\rangle$ alors $\Gamma_\ell = \langle w_1 + \ell(w_1)e_0, \ldots, w_k + \ell(w_k)e_0\rangle$. Réciproquement, si $V \in X_1$ alors $V \subset p(V) \oplus \mathbb{C}e_0$ est le graphe d'une application linéaire $p(V) \to \mathbb{C}e_0 = \mathbb{C}$, c'est-à-dire un élément de la fibre de T^* au point $p(V)$. ∎

On peut donc identifier X_1 muni de la projection $p : X_1 \to G_\omega(k, 2n)$ décrite dans la démonstration précédente et le dual T^* du fibré tautologique sur $G_\omega(k, 2n)$. Modulo cette identification, l'action du radical unipotent $U \simeq F^*$ de Sp_{2n+1} sur X_1 peut être décrite de la manière suivante :

$$\forall f \in F^*, \quad \forall \ell \in W^*,\ W \in G_\omega(k, 2n) : \qquad f \cdot \ell = f|_W + \ell. \tag{2.1}$$

De même, l'action de $\mathbb{C}^* \subset \mathrm{Sp}_{2n+1}$ sur X_1 est donnée par

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}^*, \quad \forall \ell \in W^*,\ W \in G_\omega(k, 2n) : \qquad \lambda \cdot \ell = \lambda\ell. \tag{2.2}$$

2.2 Variétés de Schubert d'une grassmannienne symplectique impaire

2.2.1 Cellules de Schubert

Il s'agit ici de répondre à la question suivante : existe-t-il une décomposition cellulaire pour les grassmanniennes symplectiques impaires similaire à celle fournie par les cellules de Schubert pour les grassmanniennes symplectiques usuelles ? C'est une question qui apparaît très naturellement si on fait appel à la ressemblance (au moins formelle) entre grassmanniennes symplectiques impaires et grassmanniennes symplectiques usuelles.

Gardant à l'esprit cette ressemblance, les différentes manières de caractériser les cellules de Schubert dans $G_\omega(k,2n)$ sont envisageables comme tout autant de définitions possibles pour des cellules dans $G_\omega(k,2n+1)$. Plusieurs approches sont donc possibles : définir des cellules dans $G_\omega(k,2n+1)$ à l'aide de conditions d'incidence par rapport à un drapeau isotrope fixé, prendre la stratification donnée par les orbites d'un sous-groupe de Borel de Sp_{2n+1} dans $G_\omega(k,2n+1)$, ou encore considérer la décomposition de Białynicki-Birula associée à l'action d'un tore de Sp_{2n+1}.

Il s'avère effectivement que ces trois approches aboutissent à des décompositions cellulaires de $G_\omega(k,2n+1)$, et qu'en outre, comme pour $G_\omega(k,2n)$, ces décompositions sont équivalentes. Pour le voir on peut procéder à une démonstration directe, mais il est beaucoup plus simple de faire l'observation suivante, qui nous ramène au cas symplectique pair.

Proposition 2.2.1. *Il existe un plongement de la grassmannienne symplectique impaire $G_\omega(k, 2n+1)$ dans la grassmannienne symplectique $G_\omega(k,2n+2)$ qui identifie $G_\omega(k,2n+1)$ à une sous-variété de Schubert de $G_\omega(k,2n+2)$.*

PREUVE. Plongeons $\mathbb{C}^{2n+1}$ dans $\mathbb{C}^{2n+2}$ et comme dans 1.1.11 choisissons une forme symplectique $\tilde{\omega}$ sur $\mathbb{C}^{2n+2}$ qui prolonge ω. Soit aussi e_{2n+1} un vecteur qui complète $\{e_0,\dots,e_{2n}\}$ en une base symplectique. Alors un sous-espace $V \subset \mathbb{C}^{2n+1}$ est isotrope si et seulement si vu comme sous-espace de $\mathbb{C}^{2n+2}$ il est isotrope pour $\tilde{\omega}$. Ainsi la grassmannienne symplectique impaire $G_\omega(k,2n+1)$ s'identifie à la sous-variété $\{V \in G_{\tilde{\omega}}(k,2n+2) \mid V \subset \mathbb{C}^{2n+1}\}$. Or, cette dernière est une sous-variété de Schubert de $G_{\tilde{\omega}}(k,2n+2)$: dans les notations de A.2.1 et par rapport au drapeau isotrope complet $\langle e_0\rangle \subset \langle e_0,e_1\rangle \subset \cdots \subset \langle e_0,\dots,e_{2n+1}\rangle$, c'est la variété de Schubert $X_{\bar{k}\dots\bar{2}\bar{1}}$ d'indice $(\bar{k},\dots,\bar{2},\bar{1}) = (2n+1-k,\dots,2n-1,2n)$ si $k<n+1$, respectivement $X_{0\bar{n}\dots\bar{2}\bar{1}}$ d'indice $(0,\bar{n},\dots,\bar{2},\bar{1}) = (0,n+1,\dots,2n)$ si $k=n+1$. ∎

Notation 2.2.2. On note $\mathbf{max} = \mathbf{max}_{k,n}$ l'indice de la variété de Schubert de $G_\omega(k,2n+2)$ à laquelle s'identifie $G_\omega(k,2n+1)$ dans la preuve précédente, c'est-à-dire[2]

$$\mathbf{max} = \begin{cases} (2n-k+1,\dots,2n) = (\bar{k},\dots,\bar{1}) & \text{si } k<n+1 \\ (0,n+1,\dots,2n) = (0,\bar{n},\dots,\bar{1}) & \text{si } k=n+1. \end{cases}$$

On a $\mathbf{max} \in \mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+2}$, c'est-à-dire que $\mathbf{max}$ est un indice admissible de $\{0,\dots,2n+1\}$ – cf. A.2.2.

[2] L'indice $\mathbf{max}$ dépend des entiers k et n mais pour ne pas trop charger la notation on va le noter $\mathbf{max}$ pour le reste de cette section.

Une conséquence de la proposition précédente est donc que la grassmannienne symplectique impaire $G_\omega(k, 2n+1)$ hérite de la décomposition cellulaire de la variété de Schubert $X_{\mathbf{max}}$:

$$X_{\mathbf{max}} = \bigsqcup_{I \leqslant \mathbf{max}} C_I$$

où les indices I sont dans $\mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+2}$. Il est donc naturel de poser la définition suivante :

Définition 2.2.3. Les *cellules de Schubert* de $G_\omega(k, 2n+1)$ qui correspondent au drapeau $\langle e_0 \rangle \subset \langle e_0, e_1 \rangle \subset \cdots \subset \langle e_0, \ldots, e_{2n} \rangle$ sont les cellules de Schubert de $G_{\tilde{\omega}}(k, 2n+2)$ incluses dans $X_{\mathbf{max}}$ modulo l'identification de $G_\omega(k, 2n+1)$ avec $X_{\mathbf{max}}$.

Pour s'assurer que, en effet, cette définition ne dépend que du choix du drapeau complet $\langle e_0 \rangle \subset \langle e_0, e_1 \rangle \subset \cdots \subset \langle e_0, \ldots, e_{2n} \rangle$ et pas du plongement $G_\omega(k, 2n+1) \subset G_{\tilde{\omega}}(k, 2n+2)$, on décrit explicitement les images des C_I dans $G_\omega(k, 2n+1)$. On obtient alors également les trois caractérisations mentionnées au début de cette section. On introduit d'abord plusieurs notations. On commence par introduire un ensemble ordonné dont on prouvera qu'il est en bijection avec les cellules de Schubert de la grassmannienne symplectique impaire $G_\omega(k, 2n+1)$.

Notation 2.2.4. On note $\mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+1}$ l'ensemble des multi-indices $J = (0 \leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant 2n)$ qui vérifient $j_\alpha + j_\beta \neq 2n+1$ pour tous $1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant k$. C'est un sous-ensemble de $\mathbf{I}_{k,2n+1}$; les indices de $\mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+1}$ sont appelés *admissibles*.

Autrement dit $J \in \mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+1}$ si et seulement si $j_\alpha \neq \overline{j_\beta}$ pour tous $1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant k$, c'est-à-dire que a et $\bar{a}$ n'appartiennent pas simultanément à J pour tout $1 \leqslant a \leqslant n$.

On définit un ordre sur $\mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+1}$ en prenant la restriction de l'ordre de $\mathbf{I}_{k,2n+1}$, c'est-à-dire que pour I et J dans $\mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+1}$ on a

$$I \leqslant J \iff i_\alpha \leqslant j_\alpha \text{ pour tout } 1 \leqslant \alpha \leqslant k. \tag{2.3}$$

L'indice **max** définit plus haut est également un élément de $\mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+1}$ (si on le voit comme indice de $\{0, \ldots, 2n\}$) et alors pour tout $I \in \mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+1}$ on a $I \leqslant \mathbf{max}$, c'est-à-dire que **max** est l'élément maximum de $\mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+1}$.

Proposition 2.2.5. *Il y a une bijection* $\mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+1} \simeq \{I \in \mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+2} \mid I \leqslant \mathbf{max}\}$ *qui préserve la relation d'ordre.*

PREUVE. L'inclusion $\{0, \ldots, 2n\} \subset \{0, \ldots, 2n+1\}$ induit une inclusion des ensembles d'indices $\mathbf{I}_{k,2n+1} \subset \mathbf{I}_{k,2n+2}$ et ainsi une inclusion $\mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+1} \subset \mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+2}$, de sorte que $\mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+1}$ s'identifie au sous-ensemble $\{I = (i_1, \ldots, i_k) \in \mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+2} \mid i_k \leqslant 2n\}$. Cette inclusion est croissante, autrement dit l'ordre de $\mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+1}$ est induit par l'ordre de $\mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+2}$. Pour I dans $\mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+2}$, on a $i_k \leqslant 2n$ si et seulement si $I \leqslant \mathbf{max}$ donc l'image de $\mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+1}$ dans $\mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+2}$ est l'intervalle $\{I \in \mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+2} \mid I \leqslant \mathbf{max}\}$, comme voulu. ∎

Ceci montre que $\mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+1}$ paramètre les cellules de Schubert de $G_\omega(k, 2n+1)$.

Notation 2.2.6. On note C_I la cellule de Schubert de $G_\omega(k, 2n+1)$ définie par un indice $I \in \mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+1}$, c'est-à-dire la cellule de Schubert de $X_{\mathbf{max}}$ qui correspond à l'indice de $\mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+2}$ qui est l'image de I par la bijection de la proposition précédente.

Voici maintenant la caractérisation des cellules de Schubert de la grassmannienne symplectique impaire $G_\omega(k, 2n+1)$ par des conditions d'incidence :

Proposition 2.2.7. *Soit $I \in \mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+1}$ un indice admissible de $\{0, \ldots, 2n\}$. La cellule de Schubert C_I de $G_\omega(k, 2n+1)$ est l'ensemble des sous-espaces $V \in G_\omega(k, 2n+1)$ dont le type d'incidence par rapport au drapeau $\langle e_0\rangle \subset \langle e_0, e_1\rangle \subset \cdots \subset \langle e_0, \ldots, e_{2n}\rangle$ est I, c'est-à-dire qui vérifient*

$$\dim(V \cap \langle e_0, \ldots, e_i\rangle) = \alpha, \ \textit{pour tout } 1 \leqslant \alpha \leqslant k \textit{ et tout } i_\alpha \leqslant i < i_{\alpha+1}, \tag{2.4}$$

où l'on pose par convention $i_{k+1} = 2n+1$.

PREUVE. C'est juste une réécriture des conditions d'incidence qui caractérisent la cellule C_I par rapport au drapeau $\langle e_0\rangle \subset \langle e_0, e_1\rangle \subset \cdots \subset \langle e_0, \ldots, e_{2n+1}\rangle$. En effet, $V \in G_\omega(k, 2n+2)$ est dans C_I si et seulement si (cf. n° A.2.1)

$$\dim(V \cap \langle e_0, \ldots, e_i\rangle) = \alpha, \ \text{pour tout } 1 \leqslant \alpha \leqslant k \text{ et tout } i_\alpha \leqslant i < i_{\alpha+1},$$

où $i_{k+1} = 2n+1$, et comme $i_k \leqslant 2n$, la dernière condition – celle pour $i = 2n+1$ – est superflue ; en l'oubliant, on reste exactement avec les conditions (2.4). ■

2.2.8. Comme dans le cas symplectique, un sous-espace $V \in G_\omega(k, 2n+1)$ appartient à la cellule C_I définie par un indice admissible $I \in \mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+1}$ si et seulement si, par rapport à la base symplectique $\{e_0, \ldots, e_{2n}\}$, il est engendré par les lignes d'une matrice échelon de type I, c'est-à-dire une matrice $(a_{\alpha i})$ de taille $k \times (2n+1)$ telle que sur une ligne α le coefficient $a_{\alpha i_\alpha}$ est non nul et tous les coefficients situés à sa droite sont nuls : $a_{\alpha i} = 0, i > i_\alpha$. En effet, comme sous-espace de $\mathbb{C}^{2n+2}$, V est de type d'incidence I par rapport au drapeau $\langle e_0\rangle \subset \langle e_0, e_1\rangle \subset \cdots \subset \langle e_0, \ldots, e_{2n+1}\rangle$; il est alors engendré par les lignes d'une matrice échelon de type I de taille $k \times (2n+2)$ – cf. n° A.2.3. En supprimant la dernière colonne, qui est nulle, de cette matrice on reste avec une matrice du type recherché.

Une telle matrice sera uniquement déterminée si on lui impose les conditions supplémentaires $a_{\alpha i_\alpha} = 1$, respectivement $a_{\beta i_\alpha} = 0$, pour tout α, respectivement pour tout $\beta > \alpha$. Toutes les autres coefficients sont libres, à l'exception de ceux opposés[3] à une position où il y a un 1 dans une ligne supérieure, c'est-à-dire les coefficients situés sur la colonne $\overline{i_\alpha}$ en dessous de la ligne α, pour chaque $\alpha \leqslant k$, qui sont déterminés (cf. n° A.2.3). On marque les coefficients libres par des $*$ et les coefficients déterminés par des $\bullet$. Cela nous décrit explicitement une carte affine sur la cellule C_I :

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} 0\ \ 1 & \qquad i_1 & \qquad \overline{i_2} & \qquad i_2 & \qquad \overline{i_1} & \qquad i_k & \qquad \bar{1} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
* & \cdots\cdots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
* & \cdots\cdots & 0 & * & \cdots & \bullet & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
* & \cdots\cdots & 0 & * & \cdots & \bullet & \cdots & 0 & * & \cdots & \bullet & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \\
* & \cdots\cdots & 0 & * & \cdots & \bullet & \cdots & 0 & * & \cdots & \bullet & \cdots & 1 & 0 & \cdots
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Notation 2.2.9. Soit $I \in \mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+1}$ un indice admissible. On note $\ell(I)$ la *longueur* de I, définie comme étant la longueur de I vu comme élément de $\mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+2}$, c'est-à-dire

$$\ell(I) = \sum_{\alpha=1}^{k} (i_\alpha - \alpha) - \#\{(\alpha, \beta) \mid 1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant k, \ i_\alpha + i_\beta > 2n+1\}. \tag{2.5}$$

C'est le nombre de $*$ dans la matrice ci-dessus.

[3]Comme dans l'appendice, nous disons que le coefficient $a_{\alpha i}$ est *opposé* au coefficient $a_{\alpha \bar{i}}$.

On a donc :

Proposition 2.2.10. *Pour $I \in \mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+1}$, la cellule de Schubert C_I est isomorphe à l'espace affine $\mathbb{A}^{\ell(I)}$.*

Puisque l'ordre dans $\mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+1}$ est induit par l'ordre de $\mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+2}$, on obtient aussitôt une description de l'ordre de Bruhat sur $G_\omega(k, 2n+1)$:

Proposition 2.2.11. *Soit I et J deux indices admissibles $I, J \in \mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+1}$. Alors $C_I \subset \overline{C_J}$ si et seulement si $I \leqslant J$.*

Soit $B \subset \mathrm{Sp}_{2n+1}$ le sous-groupe de Borel qui préserve le drapeau $\langle e_0 \rangle \subset \langle e_0, e_1 \rangle \subset \cdots \subset \langle e_0, \ldots, e_{2n} \rangle$.

Proposition 2.2.12. *Les cellules de Schubert de $G_\omega(k, 2n+1)$, définies par rapport au drapeau $\langle e_0 \rangle \subset \langle e_0, e_1 \rangle \subset \cdots \subset \langle e_0, \ldots, e_{2n} \rangle$, sont les orbites de B dans $G_\omega(k, 2n+1)$.*

Preuve. Soit $\tilde{B}$ le sous-groupe de Borel de Sp_{2n+2} qui préserve le drapeau $\langle e_0 \rangle \subset \langle e_0, e_1 \rangle \subset \cdots \subset \langle e_0, \ldots, e_{2n+1} \rangle$. Les orbites de $\tilde{B}$ dans $G_\omega(k, 2n+2)$ sont les cellules de Schubert de $G_\omega(k, 2n+2)$ définies par rapport au drapeau $\langle e_0 \rangle \subset \langle e_0, e_1 \rangle \subset \cdots \subset \langle e_0, \ldots, e_{2n+1} \rangle$. L'action de $\tilde{B}$ sur la variété de Schubert $X_{\mathbf{max}} = \{V \in G_\omega(k, 2n+2) \mid V \subset \mathbb{C}^{2n+1}\}$ se fait via le morphisme de restriction $b \mapsto b|_{\mathbb{C}^{2n+1}}$. Or, d'après la proposition 1.1.12 l'image de $\tilde{B}$ par ce morphisme est B, ce qui finit la démonstration. ■

On a également :

Proposition 2.2.13. *Soit T le tore maximal de Sp_{2n+1} qui agit diagonalement dans la base $\{e_0, \ldots, e_{2n}\}$. Alors T a un nombre fini de points fixes dans $G_\omega(k, 2n+1)$ qui sont en bijection avec $\mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+1}$ et les cellules de Schubert de $G_\omega(k, 2n+1)$ sont les cellules de Białynicki-Birula associées à l'action de T dans $G_\omega(k, 2n+1)$ et à un sous-tore à un paramètre de T qui a les mêmes points fixes que T.*

Preuve. Soit $\tilde{T}$ le tore maximal de Sp_{2n+2} qui est formé par les matrices de Sp_{2n+2} diagonales dans la base $\{e_0, \ldots, e_{2n+1}\}$. L'action de $\tilde{T}$ sur la variété de Schubert $X_{\mathbf{max}}$ de $G_\omega(k, 2n+2)$ se fait à travers le morphisme de restriction $t \mapsto t|_{\mathbb{C}^{2n+1}}$, qui est un isomorphisme de $\tilde{T}$ sur T. On conclut alors en faisant appel au résultat analogue pour $G_\omega(k, 2n+2)$, cf. n° A.2.4. ■

Remarque 2.2.14. Le point fixe de T dans $G_\omega(k, 2n+1)$ qui correspond à un indice admissible $I \in \mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+1}$, $I = (i_1, \ldots, i_k)$ est le sous-espace $\langle e_{i_1}, \ldots, e_{i_k} \rangle$.

2.2.2 Variétés de Schubert

Définition 2.2.15. Les *sous-variétés de Schubert* de $G_\omega(k, 2n+1)$ qui correspondent au drapeau complet $\langle e_0 \rangle \subset \langle e_0, e_1 \rangle \subset \cdots \subset \langle e_0, \ldots, e_{2n} \rangle$ sont les adhérences des cellules de Schubert définies par rapport au même drapeau. Pour $I \in \mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+1}$ un indice admissible, on note X_I la sous-variété de Schubert qui est l'adhérence de la cellule C_I.

Si on identifie $G_\omega(k, 2n+1) = X_{\mathbf{max}} \subset G_\omega(k, 2n+2)$ comme dans la proposition 2.2.1 alors les sous-variétés de Schubert de $G_\omega(k, 2n+1)$ coïncident avec les sous-variétés de Schubert de $X_{\mathbf{max}}$.

La caractérisation des sous-variétés de Schubert de $G_\omega(k, 2n+1)$ par des relations d'incidence par rapport au drapeau $\langle e_0 \rangle \subset \langle e_0, e_1 \rangle \subset \cdots \subset \langle e_0, \ldots, e_{2n} \rangle$ se déduit alors immédiatement du résultat analogue pour $G_\omega(k, 2n+2)$. L'énoncé est en fait identique :

Proposition 2.2.16. *Soit $I \in \mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+1}$ un indice admissible. La sous-variété de Schubert X_I de $G_\omega(k, 2n+1)$ est la sous-variété des espaces $V \in G_\omega(k, 2n+1)$ qui vérifient*

$$\dim(V \cap \langle e_0, \dots, e_{i_\alpha} \rangle) \geqslant \alpha, \text{ pour tout } 1 \leqslant \alpha \leqslant k.$$

Les sous-espaces $V \in G_\omega(k, 2n+1)$ qui appartiennent à X_I sont donc les sous-espaces qui, par rapport à la base symplectique $\{e_0, \dots, e_{2n}\}$, sont engendrés par les lignes d'une matrice $(a_{\alpha i})$ de taille $k \times (2n+1)$ dont les coefficients situés sur une ligne α à droite du coefficient $a_{\alpha i_\alpha}$ sont nuls, c'est-à-dire $a_{\alpha i} = 0$ pour tous α et $i > i_\alpha$:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} & & i_1 & & i_2 & & i_k & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} * & \cdots & * & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & * & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & \ddots & & & \vdots \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{2.6}$$

2.2.3 Le polynôme de Poincaré de $G_\omega(k, 2n+1)$

Le polynôme de Poincaré de la grassmannienne symplectique impaire $G_\omega(k, 2n+1)$ est, par définition, le polynôme à coefficients entiers

$$P(G_\omega(k, 2n+1), t) = \sum_{i=0}^{N} \operatorname{rang} H^{2i}(G_\omega(k, 2n+1), \mathbb{Z}) t^i,$$

où $N = \dim G_\omega(k, 2n+1)$ et où, pour calculer les groupes de cohomologie $H^{2i}(G_\omega(k, 2n+1), \mathbb{Z})$, on munit $G_\omega(k, 2n+1)$ de la topologie transcendante, sous-jacente à sa structure de variété analytique complexe. En d'autres termes, c'est la fonction génératrice des nombres de Betti de $G_\omega(k, 2n+1)$, et donc déterminer le polynôme de Poincaré équivaut à déterminer le nombres de Betti. Comme on a vu, le $2i$-ème nombre de Betti B_{2i} de $G_\omega(k, 2n+1)$ est égal au nombre de cellules de Schubert de dimension i de $G_\omega(k, 2n+1)$, ou, ce qui revient au même, au nombre d'indices admissibles $I \in \mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+1}$ de longueur i. La formule (2.5) qui donne la longueur d'un indice admissible est pourtant assez compliquée, et calculer directement les nombres de Betti en utilisant cette formule devient vite pénible, même dans des cas particuliers où n et k sont très petits.

On va donc adopter le point de vue contraire qui est de calculer le polynôme de Poincaré par d'autres moyens et d'obtenir ainsi une méthode efficace de calcul des nombres de Betti. Pour ce faire on s'inspire d'une méthode de calcul du polynôme de Poincaré de la grassmannienne usuelle $G(k, n)$, qui consiste à compter les points de $G(k, n)$ à valeurs dans un corps fini. L'énoncé pour $G_\omega(k, 2n+1)$ est le suivant :

Proposition 2.2.17. *Soit $q = p^m$ une puissance d'un nombre premier p et $\mathbb{F}_q$ le corps à q éléments. Alors $P(G_\omega(k, 2n+1), q)$ est égal au nombre de points $\mathbb{F}_q$-rationnels de $G_\omega(k, 2n+1)$.*

PREUVE. Ceci appelle quelques précisions. Pour définir correctement les points $\mathbb{F}_q$-rationnels de $G_\omega(k, 2n+1)$ on va identifier la variété algébrique complexe $G_\omega(k, 2n+1)$ à l'ensemble des points $\mathbb{C}$-rationnels du complexifié d'un schéma de type fini $\mathsf{G}_\omega(k, 2n+1)$. En effet, dans une base symplectique $\{e_0, \dots, e_{2n}\}$, ω est la forme canonique sur $\mathbb{C}^{2n+1}$

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (e_i^* \otimes e_{\bar{i}}^* - e_{\bar{i}}^* \otimes e_i^*) \tag{2.7}$$

qui est à coefficients entiers, et alors $G_\omega(k, 2n+1)$ est donnée comme fermé de $\mathbb{P}\Lambda^k\mathbb{C}^{2n+1}$ par des équations à coefficients entiers : il suffit de prendre les équations de Plücker et l'équation $x \llcorner \omega = 0$ pour $x \in \Lambda^k\mathbb{C}^{2n+1}$, exprimées dans la base de $\Lambda^k\mathbb{C}^{2n+1}$ induite par la base $\{e_0, \ldots, e_{2n}\}$ de $\mathbb{C}^{2n+1}$; on renvoie le lecteur pour plus de détails à la proposition 2.3.15 ci-dessous. Si l'on désigne par T_I, $I \subset \{0, \ldots, 2n\}$, $|I| = k$ les coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}\Lambda^k\mathbb{C}^{2n+1}$ induites par la base $\{e_0, \ldots, e_{2n}\}$ de $\mathbb{C}^{2n+1}$, et par $P_1, \ldots, P_s \in \mathbb{Z}[T_I; I]$ les équations ci-dessus – où $\mathbb{Z}[T_I; I]$ est l'anneau de polynômes en les indéterminées T_I, alors $G_\omega(k, 2n+1)$ est l'ensemble des points $\mathbb{C}$-rationnels du schéma $\operatorname{Proj}\mathbb{C}[T_I; I]/(P_1, \ldots, P_s)$ qui est le complexifié du schéma de type fini $\operatorname{Proj}\mathbb{Z}[T_I; I]/(P_1, \ldots, P_s)$; notons $\mathsf{G}_\omega(k, 2n+1)$ ce dernier schéma.

Revenons au polynôme de Poincaré de la grassmannienne symplectique impaire, on va montrer que $P(G_\omega(k, 2n+1), q)$ est égal au nombre des points $\mathbb{F}_q$-rationnels du schéma

$$\mathsf{G}_\omega(k, 2n+1) \times \operatorname{Spec}\mathbb{F}_q = \operatorname{Proj}\mathbb{F}_q[T_I; I]/(P_1, \ldots, P_s).$$

L'ensemble des points $\mathbb{F}_q$-rationnels de ce schéma s'identifie par les mêmes arguments que ci-dessus à l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k du $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel $\mathbb{F}_q^{2n+1}$, isotropes pour la forme (2.7), autrement dit à une *$\mathbb{F}_q$-grassmannienne symplectique impaire* $G_\omega(k, \mathbb{F}_q^{2n+1})$. On remarque alors que la décomposition de $G_\omega(k, 2n+1)$ comme réunion disjointe de cellules de Schubert reste vraie aussi pour $G_\omega(k, \mathbb{F}_q^{2n+1})$; en effet dans la description matricielle des cellules de $G_\omega(k, 2n+1)$ qu'on a explicité au nº 2.2.8 on n'utilise pas le fait que les coefficients sont dans $\mathbb{C}$ mais seulement qu'ils appartiennent à un corps. On peut donc écrire

$$G_\omega(k, \mathbb{F}_q^{2n+1}) = \bigsqcup_{I \in \mathbf{I}^\omega_{k,2n+1}} C_I(\mathbb{F}_q),$$

où la cellule $C_I(\mathbb{F}_q)$ est isomorphe comme $\mathbb{F}_q$-variété à l'espace affine $\mathbb{A}^{\ell(I)}_{\mathbb{F}_q}$, en particulier $|C_I(\mathbb{F}_q)| = q^{\ell(I)}$. On a donc

$$|G_\omega(k, \mathbb{F}_q^{2n+1})| = \sum_{I \in \mathbf{I}^\omega_{k,2n+1}} q^{\ell(I)},$$

et pour conclure cette démonstration il suffit de remarquer que le $2i$-ème nombre de Betti B_{2i} de $G_\omega(k, 2n+1)$ est égal au cardinal $|\{I \in \mathbf{I}^\omega_{k,2n+1} | \ell(I) = i\}|$. ■

Retenons de la démonstration précédente la notation $G_\omega(k, \mathbb{F}_q^{2n+1})$ qui désigne la variété des sous-espaces de dimension k de $\mathbb{F}_q^{2n+1}$, isotropes pour la forme (2.7). On va calculer le nombre de points de $G_\omega(k, \mathbb{F}_q^{2n+1})$.

On commence par remarquer que la proposition 2.1.5 qui décrit les orbites du groupe Sp_{2n+1} dans $G_\omega(k, 2n+1)$ reste vraie pour $G_\omega(k, \mathbb{F}_q^{2n+1})$: plus précisément, si l'on désigne par $\mathrm{Sp}_{2n+1}(\mathbb{F}_q)$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}(2n+1, \mathbb{F}_q)$ qui préserve la forme (2.7) alors $\mathrm{Sp}_{2n+1}(\mathbb{F}_q)$ a deux orbites dans $G_\omega(k, \mathbb{F}_q^{2n+1})$, l'orbite fermée est isomorphe à une $\mathbb{F}_q$-grassmannienne symplectique $G_\omega(k-1, \mathbb{F}_q^{2n})$ et l'orbite ouverte est isomorphe au dual du fibré tautologique sur la $\mathbb{F}_q$-grassmannienne symplectique $G_\omega(k, \mathbb{F}_q^{2n})$. En effet, comme c'était le cas pour la décomposition cellulaire, la démonstration de cet énoncé n'utilise pas le fait que les coefficients sont des nombres complexes mais seulement qu'ils appartiennent à un corps.

On compte alors séparément les points des deux $\mathrm{Sp}_{2n+1}(\mathbb{F}_q)$-orbites et, tenant compte du fait que le fibré tautologique sur $G_\omega(k, \mathbb{F}_q^{2n})$ est de rang k, on obtient

$$|G_\omega(k, \mathbb{F}_q^{2n+1})| = |G_\omega(k-1, \mathbb{F}_q^{2n})| + q^k |G_\omega(k, \mathbb{F}_q^{2n})|. \tag{2.8}$$

On a réduit ainsi le problème au calcul du nombre des points d'une $\mathbb{F}_q$-grassmannienne symplectique. Pour compter le nombre des points de $G_\omega(k, \mathbb{F}_q^{2n})$ on compte les familles de vecteurs $\{v_1, \ldots, v_k\}$ de $\mathbb{F}_q^{2n}$ qui engendrent des sous-espaces isotropes, et l'on divise ce nombre par le nombre de bases d'un sous-espace de dimension k donné. Une famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ engendre un sous-espace isotrope de dimension k si et seulement si

$$\begin{aligned}
&v_1 \in \mathbb{F}_q^{2n} \setminus \{0\} \\
&v_2 \in \langle v_1 \rangle^\perp \setminus \langle v_1 \rangle \\
&\ldots \\
&v_k \in \langle v_1, \ldots, v_{k-1} \rangle^\perp \setminus \langle v_1, \ldots, v_{k-1} \rangle
\end{aligned}$$

et donc le nombre des telles familles est $(q^{2n}-1)(q^{2n-1}-q)\ldots(q^{2n-k+1}-q^{k-1})$, puisque pour tout sous-espace V de $\mathbb{F}_q^{2n}$ on a $\dim V^\perp = 2n - \dim V$.[4] Ensuite, ayant fixé un sous-espace $V \subset \mathbb{F}_q^{2n}$ de dimension k, une famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ est une base de V si et seulement si

$$\begin{aligned}
&v_1 \in V \setminus \{0\} \\
&v_2 \in V \setminus \langle v_1 \rangle \\
&\ldots \\
&v_k \in V \setminus \langle v_1, \ldots, v_{k-1} \rangle
\end{aligned}$$

donc le nombre des bases de V est $(q^k-1)(q^k-q)\ldots(q^k-q^{k-1})$. On obtient donc que

$$\begin{aligned}
|G_\omega(k, \mathbb{F}_q^{2n})| &= \frac{(q^{2n}-1)(q^{2n-1}-q)\ldots(q^{2n-k+1}-q^{k-1})}{(q^k-1)(q^k-q)\ldots(q^k-q^{k-1})} \\
&= \frac{(q^{2n}-1)(q^{2n-2}-1)\ldots(q^{2n-2k+2}-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\ldots(q-1)}. \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

Avec la formule (2.8) ci-dessus, ceci nous donne

$$\begin{aligned}
|G_\omega(k, \mathbb{F}_q^{2n+1})| &= \frac{(q^{2n}-1)(q^{2n-2}-1)\ldots(q^{2n-2k+4}-1)}{(q^{k-1}-1)(q^{k-2}-1)\ldots(q-1)} + \\
&\quad + q^k \frac{(q^{2n}-1)(q^{2n-2}-1)\ldots(q^{2n-2k+2}-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\ldots(q-1)} \\
&= \frac{(q^k-1+q^k(q^{2n-2k+2}-1))(q^{2n}-1)(q^{2n-2}-1)\ldots(q^{2n-2k+4}-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\ldots(q-1)} \\
&= \frac{(q^{2n-k+2}-1)(q^{2n}-1)(q^{2n-2}-1)\ldots(q^{2n-2k+4}-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\ldots(q-1)}. \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

D'après la proposition 2.2.17 et son analogue pour $G_\omega(k, 2n)$, les fractions rationnelles en la variable q des formules (2.9) et (2.10) sont des polynômes ; ce sont respectivement les polynômes de Poincaré de la grassmannienne symplectique $G_\omega(k, 2n)$ et de la grassmannienne symplectique impaire $G_\omega(k, 2n+1)$.

On remarque en particulier que la formule (2.10) ne s'obtient pas à partir de la formule (2.9) en changeant $2n$ en $2n+1$. Toutefois, en examinant plus attentivement la suite des exposants

[4]La dernière égalité fait défaut dans $\mathbb{F}_q^{2n+1}$, et c'est ce qui nous empêche de compter directement les points de $G_\omega(k, \mathbb{F}_q^{2n+1})$.

de q dans les facteurs des numérateurs de (2.9) et (2.10), on peut donner une formule uniforme en N pour $P(G_\omega(k,N),q)$; le désavantage est que cette formule dépend de la parité de k, on a ainsi deux formules, une pour k pair et une pour k impair. Afin de les énoncer, prenons d'abord sur deux exemples la liste des exposants des formules (2.9) et (2.10) : pour $k=4$ on a

$$\begin{array}{lcccc} N=2n & 2n & 2n-2 & 2n-4 & 2n-6 \\ N=2n+1 & 2n & 2n-2 & 2n-2 & 2n-4 \\ N=2n+2 & 2n+2 & 2n & 2n-2 & 2n-4 \end{array}$$

respectivement pour $k=5$ on a

$$\begin{array}{lccccc} N=2n & 2n & 2n-2 & 2n-4 & 2n-6 & 2n-8 \\ N=2n+1 & 2n & 2n-2 & 2n-3 & 2n-4 & 2n-6 \\ N=2n+2 & 2n+2 & 2n & 2n-2 & 2n-4 & 2n-6. \end{array}$$

Ceci se généralise en les formules suivantes : pour $k=2\ell$

$$P(G_\omega(k,N),q)=\frac{\prod_{i=1}^{\ell}\left(q^{2[N/2]+2-2i}-1\right)\prod_{i=\ell+1}^{2\ell}\left(q^{2[(N+1)/2]+2-2i}-1\right)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\dots(q-1)} \tag{2.11}$$

pour $k=2\ell+1$

$$P(G_\omega(k,N),q)=\frac{\left[\prod_{i=1}^{\ell}\left(q^{2[N/2]+2-2i}-1\right)\right](q^{N-2\ell}-1)\left[\prod_{i=\ell+2}^{2\ell+1}\left(q^{2[(N+1)/2]+2-2i}-1\right)\right]}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\dots(q-1)}. \tag{2.12}$$

2.2.4 Groupe de Picard

Pour calculer le groupe de Picard de la grassmannienne symplectique impaire $G_\omega(k,2n+1)$ on se sert du résultat suivant qui concerne toutes les variétés projectives lisses qui possèdent une décomposition cellulaire :

Proposition 2.2.18. *Soit X une variété projective lisse qui admet une décomposition cellulaire. Alors son groupe de Picard est le groupe abélien libre engendré par les classes des adhérences des cellules de codimension 1.*

Une démonstration de cette proposition, dans la catégorie des variétés analytiques complexe, c'est-à-dire dans l'hypothèse plus large où la décomposition cellulaire est analytique, est un raisonnement standard. Si la décomposition cellulaire est algébrique, c'est-à-dire que les cellules sont des variétés algébriques isomorphes à des espaces affines – ce qui est le cas de la grassmannienne symplectique impaire ainsi que de toutes les grassmanniennes et variétés de drapeaux – alors une démonstration algébrique de ce résultat peut être trouvée dans [Bri05, 1.4.1] (où la preuve est écrite pour la variété de drapeaux ordinaire mais elle s'étend mot pour mot au cas général) ; nous donnons aussi dans la remarque 2.2.22 ci-dessous un énoncé qui s'applique en particulier à la grassmannienne symplectique impaire.

Pour la grassmannienne symplectique impaire, la décomposition cellulaire est la décomposition en réunion de cellules de Schubert et donc les adhérences des cellules sont les sous-variétés de Schubert. La question est alors de déterminer les sous-variétés de Schubert de $G_\omega(k,2n+1)$

qui sont de codimension 1, c'est-à-dire ce que l'on appelle les *diviseurs de Schubert*. Par ce qui a été discuté dans les sections 2.2.1 et 2.2.2 ci-dessus ceci revient à calculer les indices $I \in \mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+1}$ dont la longueur est 1 de moins que la longueur maximale.

On introduit la notation suivante :

Notation 2.2.19. On note $\mathbf{div} = \mathbf{div}_{k,n} \in \mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+1}$ l'indice admissible suivant[5]

$$\mathbf{div} = \begin{cases} (2n-k, 2n-k+2, \ldots, 2n) & \text{si } k \neq n+1 \\ (0, n, n+2, \ldots, 2n) & \text{si } k = n+1. \end{cases}$$

Alors, pour $I \in \mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+1}$, on vérifie aisément que

$$I \neq \mathbf{max} \Longrightarrow I \leqslant \mathbf{div},$$

autrement dit $\mathbf{div}$ est l'unique antécédent de $\mathbf{max}$ dans l'ensemble ordonné $\mathbf{I}^{\omega}_{k,2n+1}$. Puisque d'autre part $\ell(\mathbf{div}) = \ell(\mathbf{max}) - 1$, on déduit que $X_{\mathbf{div}}$ est l'unique sous-variété de Schubert de codimension 1 de $G_\omega(k, 2n+1) = X_{\mathbf{max}}$. Par la proposition 2.2.18 ceci nous donne le résultat suivant :

Proposition 2.2.20. *Le groupe de Picard de $G_\omega(k, 2n+1)$ est $\mathbb{Z}$; il est engendré par la classe d'équivalence linéaire de la sous-variété de Schubert $X_{\mathbf{div}}$.*

En utilisant la proposition 2.2.16, on obtient la description géométrique suivante pour le diviseur de Schubert $X_{\mathbf{div}}$ de la grassmannienne symplectique impaire $G_\omega(k, 2n+1)$:

Proposition 2.2.21. *Pour $1 \leqslant k \leqslant n$ le diviseur de Schubert de $G_\omega(k, 2n+1)$ est*

$$X_{\mathbf{div}} = \{V \in G_\omega(k, 2n+1) \mid V \cap \langle e_0, \ldots, e_{2n-k} \rangle \neq 0\}.$$

Le diviseur de Schubert de $G_\omega(n+1, 2n+1)$ est

$$X_{\mathbf{div}} = \{V \in G_\omega(n+1, 2n+1 \mid \dim(V \cap \langle e_0, \ldots, e_{n+2} \rangle) \geqslant 2\}.$$

Remarque 2.2.22. Une autre démonstration de la proposition 2.2.20 repose sur la proposition qui suit.

Proposition. Si X est une variété projective lisse qui a un diviseur irréductible D dont le complémentaire $U = X \setminus D$ est de groupe de Picard trivial, alors le groupe de Picard de X est $\mathbb{Z}$, engendré par D.

PREUVE. Puisque X est lisse, son groupe de Picard est isomorphe au groupe des classes de diviseurs de Weil modulo équivalence linéaire. Tout diviseur premier de X différent de D coupe U donc est trivial (dans U donc également dans X), ce qui montre bien que D engendre $\mathrm{Pic}(X)$. Il ne reste qu'à montrer que D n'est pas de torsion, et cela vient du fait qu'il n'y a pas de fonction régulière globale non constante sur X. ■

Comme remarqué précédemment, $X_{\mathbf{div}}$ est l'unique sous-variété de Schubert de codimension 1 de $G_\omega(k, 2n+1)$, donc le complémentaire $G_\omega(k, 2n+1) \setminus X_{\mathbf{div}}$ est la grosse cellule $C_{\mathbf{max}}$, dont le groupe de Picard est trivial puisque c'est un espace affine. On peut donc appliquer la proposition et il résulte donc que le groupe de Picard de $G_\omega(k, 2n+1)$ est $\mathbb{Z}$, engendré par $X_{\mathbf{div}}$.

[5] L'indice $\mathbf{div}$ dépend de k et de n mais on va le noter simplement $\mathbf{div}$ s'il n'y a pas de risque de confusion.

2.3 Le groupe d'automorphismes d'une grassmannienne symplectique impaire

On détermine ici le groupe d'automorphismes de la grassmannienne symplectique impaire $G_\omega(k, 2n+1)$. Le résultat est le suivant :

Proposition 2.3.1. *Soit $k \leqslant n$. Le groupe d'automorphismes de la grassmannienne symplectique impaire $G_\omega(k, 2n+1)$ est* PSp_{2n+1}.

Ici PSp_{2n+1} désigne le quotient $\mathrm{Sp}_{2n+1}/Z(\mathrm{Sp}_{2n+1}) = \mathrm{Sp}_{2n+1}/\{\pm 1\}$ (cf. la proposition 1.1.10). Le résultat est donc tout à fait similaire à celui qu'on a dans le cas d'une variété de drapeaux d'un groupe simple complexe : à quelques exceptions près, si G est un groupe simple complexe alors la composante identité $\mathrm{Aut}^\circ(G/P)$ du groupe d'automorphismes d'une variété de drapeaux généralisée G/P coïncide avec la forme adjointe de G (cf. [Akh95, §3.3, Théorème 2]).

Pour $k = n+1$ la grassmannienne symplectique impaire $G_\omega(n+1, 2n+1)$ est isomorphe à la grassmannienne symplectique $G_\omega(n, 2n)$ (cf. la proposition 2.1.5) et son groupe d'automorphismes est donc PSp_{2n}.

On va décrire deux façons d'aborder la preuve de la proposition 2.3.1. La première est plutôt calculatoire et aboutit seulement à la détermination de l'algèbre de Lie du groupe d'automorphismes de $G_\omega(k, 2n+1)$. Elle fournit également un résultat de rigidité de la grassmannienne symplectique impaire (cf. la proposition 2.3.13). La deuxième approche est plus géométrique et se base sur une analyse des espaces linéaires contenus dans $G_\omega(k, 2n+1)$.

2.3.1 Une première approche

Le point de départ de cette première approche est l'observation que l'algèbre de Lie du groupe d'automorphismes de $G_\omega(k, 2n+1)$ est l'espace de sections globales du fibré tangent $H^0(G_\omega(k, 2n+1), TG_\omega(k, 2n+1))$ (cf. [Akh95, §2.3]).

Comme on l'a déjà mentionné dans la démonstration de la proposition 2.1.4, la grassmannienne symplectique impaire $G_\omega(k, 2n+1)$ est le lieu d'annulation de la section générique ω du fibré $\Lambda^2 T^*$ sur la grassmannienne usuelle $G(k, 2n+1)$. La différentielle $d\omega$ définit alors un morphisme surjectif de fibrés vectoriels sur $G_\omega(k, 2n+1)$

$$d\omega : TG(k, 2n+1)|_{G_\omega(k,2n+1)} \longrightarrow \Lambda^2 T^*|_{G_\omega(k,2n+1)} \tag{2.13}$$

qui identifie $\Lambda^2 T^*|_{G_\omega(k,2n+1)}$ au fibré normal de $G_\omega(k, 2n+1)$ dans $G(k, 2n+1)$. Autrement dit on a une suite exacte courte de fibrés

$$0 \longrightarrow TG_\omega(k, 2n+1) \longrightarrow TG(k, 2n+1)|_{G_\omega(k,2n+1)} \xrightarrow{d\omega} \Lambda^2 T^*|_{G_\omega(k,2n+1)} \longrightarrow 0. \tag{2.14}$$

En prenant les sections globales, on en déduit que l'espace qui nous intéresse

$$H^0(G_\omega(k, 2n+1), TG_\omega(k, 2n+1))$$

est le noyau de la flèche

$$H^0\big(G_\omega(k, 2n+1), TG(k, 2n+1)|_{G_\omega(k,2n+1)}\big) \xrightarrow{d\omega} H^0\big(G_\omega(k, 2n+1), \Lambda^2 T^*|_{G_\omega(k,2n+1)}\big). \tag{2.15}$$

Pour le déterminer, on décrit explicitement les espaces et la flèche précédents. On utilise pour cela le complexe de Koszul associé à la section ω qui fournit une résolution du faisceau structural de $G_\omega(k,2n+1)$ par des fibrés vectoriels sur $G(k,2n+1)$. En tensorisant ce complexe par $TG(k,2n+1)$, respectivement Λ^2T^*, on obtient des résolutions par des fibrés vectoriels sur $G(k,2n+1)$ des restrictions de $TG(k,2n+1)$ et Λ^2T^* à $G_\omega(k,2n+1)$. La suite de l'argument est alors un calcul de groupes de cohomologie sur la grassmannienne $G(k,2n+1)$ à l'aide du théorème de Bott.

Pour préciser les choses on fait plusieurs rappels et on fixe quelques notations ; on reprend le calcul au n° 2.3.8.

2.3.2. Si X est une variété algébrique et E un fibré vectoriel de rang r sur X, alors le complexe de Koszul associé à une section globale s de E est le complexe

$$0 \longrightarrow \Lambda^r E^* \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Lambda^2 E^* \longrightarrow E^* \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow 0$$

où $Y \subset X$ est le lieu d'annulation de s et où les flèches $\Lambda^{j+1}E^* \to \Lambda^j E^*$ sont données par la contraction par s, c'est-à-dire

$$e_1 \wedge \cdots \wedge e_j \longmapsto \sum_{i=1}^{j} \langle e_i, s\rangle e_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{e_i} \wedge \cdots \wedge e_j$$

pour des sections locales $e_1,\dots,e_j$ de E^*. Si s est transverse à la section nulle – ce qui signifie que lorsque l'on écrit $s=(s_1,\dots,s_r)$ dans une trivialisation locale $E|_U \simeq \mathcal{O}_U^{\oplus r}$ de E au-dessus d'un ouvert U de X, les différentielles $d_xs_1,\dots,d_xs_r$ sont indépendantes pour tout $x \in U$ – alors le complexe de Koszul associé à s est exact.

2.3.3. Dans $\mathrm{SL}(2n+1,\mathbb{C})$ on fixe le sous-groupe de Borel qui préserve le drapeau $\langle e_0\rangle \subset \langle e_0,e_1\rangle \subset \cdots \subset \langle e_0,\dots,e_{2n}\rangle$ et le tore maximal formé par les matrices diagonales dans la base $\{e_0,\dots,e_{2n}\}$. Soit ε_i le caractère du tore défini par $\mathrm{diag}(x_0,\dots,x_{2n}) \mapsto x_i$. Le groupe des caractères du tore est le quotient du groupe abélien libre engendré par $\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_{2n}$ par la relation $\varepsilon_0+\cdots+\varepsilon_{2n}=0$. Dans la suite, nous allons souvent employer la même notation pour les ε_i et pour leurs images modulo cette relation. Les racines de $\mathrm{SL}(2n+1,\mathbb{C})$ sont les $\varepsilon_i-\varepsilon_j$, $0 \leqslant i \neq j \leqslant 2n$, et, correspondant au choix du sous-groupe de Borel ci-dessus, les racines positives sont les $\varepsilon_i-\varepsilon_j$, $0 \leqslant i < j \leqslant 2n$ et les racines simples les $\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}$, $0 \leqslant i \leqslant 2n-1$. Les poids fondamentaux de $\mathrm{SL}(2n+1,\mathbb{C})$ sont les $w_i=\varepsilon_0+\cdots+\varepsilon_i$, $0 \leqslant i \leqslant 2n-1$. Les poids dominants sont les combinaisons linéaires $\lambda=\sum a_iw_i$ à coefficients entiers positifs $a_i \in \mathbb{Z}_+$, autrement dit ce sont les $\lambda=\sum \lambda_i\varepsilon_i$ avec $\lambda_0 \geqslant \lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{2n}$. Puisqu'on a la relation $\varepsilon_0+\cdots+\varepsilon_{2n}=0$, il n'y a pas de restriction si l'on suppose $\lambda_{2n} \geqslant 0$. On dit qu'une suite décroissante d'entiers positifs $\lambda=(\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k)$ est une *partition* ; les λ_i sont alors les *parts* de λ, $|\lambda|=\sum\lambda_i$ son *poids* et $\ell(\lambda)$, défini comme le nombre de parts non nulles, sa *longueur*. Un poids dominant est donc la même chose qu'une partition modulo un décalage $(\lambda_0 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{2n}) \mapsto (\lambda_0+a \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{2n}+a)$. Pour $\lambda=(\lambda_0 \geqslant \lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{2n})$ une partition, le $\mathrm{SL}(2n+1,\mathbb{C})$-module irréductible de plus haut poids λ sera noté V_λ. Il est isomorphe à la puissance de Schur $S_\lambda\mathbb{C}^{2n+1}$ de la représentation standard $\mathbb{C}^{2n+1}$ de $\mathrm{SL}(2n+1,\mathbb{C})$.

2.3.4. Le réseau des poids de $\mathrm{GL}(2n+1,\mathbb{C})$ est le groupe abélien libre engendré par $\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_{2n}$, où les ε_i sont définis de la même manière que pour $\mathrm{SL}(2n+1,\mathbb{C})$. Un poids $\lambda=\sum\lambda_i\varepsilon_i$ est dominant si $\lambda_0 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{2n}$. Il n'y a donc pas de condition de positivité pour les λ_i ; on dit aussi que $\lambda=(\lambda_0 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{2n})$ est une *partition gauche*. Soit a un entier positif tel que $\lambda_{2n} + a \geqslant 0$; soit λ' la partition $\lambda' = (\lambda_0 + a \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{2n} + a \geqslant 0)$. Alors le $\mathrm{GL}(2n+1, \mathbb{C})$-module irréductible de plus haut poids λ, noté V_λ, est isomorphe au produit tensoriel $S_{\lambda'}\mathbb{C}^{2n+1} \otimes \det^{\otimes(-a)}$, où $S_{\lambda'}\mathbb{C}^{2n+1}$ est la puissance de Schur de $\mathbb{C}^{2n+1}$ associée à la partition λ' et $\det = \Lambda^{2n+1}\mathbb{C}^{2n+1}$ est la représentation de dimension 1 donnée par le déterminant. On note alors $S_\lambda\mathbb{C}^{2n+1} = S_{\lambda'}\mathbb{C}^{2n+1} \otimes \det^{\otimes(-a)} = V_\lambda$ la puissance de Schur définie par la partition gauche λ.

2.3.5. La grassmannienne $G(k, 2n+1)$ est une $\mathrm{SL}(2n+1, \mathbb{C})$-variété homogène. Soit $P \subset \mathrm{SL}(2n+1, \mathbb{C})$ le stabilisateur de l'espace engendré par les k derniers vecteurs de la base $\{e_0, \ldots, e_{2n}\}$; c'est un sous-groupe parabolique maximal de $\mathrm{SL}(2n+1, \mathbb{C})$ qui contient le sous-groupe de Borel *opposé* à celui choisi au n° 2.3.3. La catégorie des fibrés vectoriels $\mathrm{SL}(2n+1, \mathbb{C})$-homogènes sur $G(k, 2n+1)$ est équivalente à la catégorie des représentations rationnelles de P. Cette équivalence préserve les sommes directes, le passage au dual et les produits tensoriels. Un poids $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_{2n})$ de $\mathrm{SL}(2n+1, \mathbb{C})$ est *P-dominant* si $\lambda_0 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{2n-k}$ et $\lambda_{2n-k+1} \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{2n}$. Les classes d'isomorphismes des P-modules irréductibles sont en correspondance bijective avec les poids P-dominants de $\mathrm{SL}(2n+1, \mathbb{C})$.

Soit T et Q les fibrés tautologique, respectivement quotient, sur la grassmannienne $G(k, 2n+1)$; au-dessus d'un point $V \in G(k, 2n+1)$ la fibre de T est V et la fibre de Q est $\mathbb{C}^{2n+1}/V$. Alors, si $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_{2n})$ est un poids P-dominant, le $\mathrm{SL}(2n+1, \mathbb{C})$-fibré irréductible E_λ sur $G(k, 2n+1)$ donné par le P-module irréductible qui correspond à λ est

$$E_\lambda = S_{\lambda'}Q \otimes S_{\lambda''}T$$

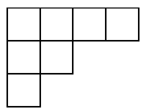
où l'on a noté λ' et λ'' les partitions gauches $\lambda_0 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{2n-k}$, respectivement $\lambda_{2n-k+1} \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{2n}$.

2.3.6. Le groupe de Weyl de $\mathrm{SL}(2n+1, \mathbb{C})$ est le groupe de permutations S_{2n+1} dont l'action sur les poids est induite par $w \cdot \varepsilon_i = \varepsilon_{w(i)}$, pour $w \in S_{2n+1}$, et $0 \leqslant i \leqslant 2n$. Un poids $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_{2n})$ est *singulier* s'il existe $a \neq b$ tels que $\lambda_a = \lambda_b$. Enfin, la demi-somme des racines positives est égale, modulo un décalage, à $\rho = (2n+1, 2n, \ldots, 1)$.

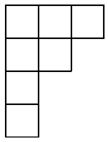
Le théorème de Bott est l'outil qui permet de calculer les groupes de cohomologie des fibrés homogènes irréductibles. L'énoncé explicite pour la grassmannienne $G(k, 2n+1)$ est le suivant :

Théorème de Bott pour la grassmannienne. *Soit $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_{2n})$ un poids P-dominant et E_λ le $\mathrm{SL}(2n+1, \mathbb{C})$-fibré irréductible associé sur la grassmannienne $G(k, 2n+1)$. Si $\lambda + \rho$ est singulier alors $H^i(G(k, 2n+1), E_\lambda) = 0$ pour tout i. Sinon soit $w \in S_{2n+1}$ l'unique permutation telle que $w(\lambda + \rho)$ soit dominant, autrement dit qui arrange les coefficients de $\lambda + \rho$ en ordre décroissant, et soit l sa longueur. Alors $H^l(G(k, 2n+1), E_\lambda)$ est le $\mathrm{SL}(2n+1, \mathbb{C})$-module irréductible $V_{w(\lambda+\rho)-\rho}$ de plus haut poids $w(\lambda + \rho) - \rho$ et $H^i(G(k, 2n+1), E_\lambda) = 0$ pour tout $i \neq l$.*

2.3.7. Parfois il sera plus commode de représenter une partition $\lambda = (\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0)$ par son *diagramme de Ferrers* obtenu en alignant à gauche $\ell(\lambda)$ rangées où l'on place des cases : λ_0 cases dans la première rangée, λ_1 dans la deuxième et ainsi de suite. Par exemple, le diagramme de Ferrers de la partition $\lambda = (4, 2, 1)$ est



On définit alors la partition duale λ^* comme étant la partition dont le diagramme de Ferrers est la transposée du diagramme de Ferrers de λ. Pour $\lambda = (4, 2, 1)$ la partition duale est $\lambda^* = (3, 2, 1, 1)$ dont le diagramme de Ferrers est



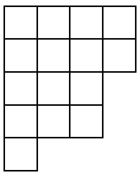
Soit r la longueur de la diagonale du diagramme de Ferrers d'une partition λ ; c'est ce qu'on appelle le *rang* de λ. Pour chaque $1 \leqslant i \leqslant r$ soit $a_i = \lambda_i - i$ le nombre de cases de la ligne i du diagramme de Ferrers de λ situées à droite de la diagonale, respectivement $b_i = \lambda_i^* - i$ le nombre de cases sur la colonne i situées en dessous de la diagonale. Alors une autre façon de représenter la partition λ est par les deux r-uplets $(a_1, \ldots, a_r)$ et $(b_1, \ldots, b_r)$:

$$\lambda = (a_1, \ldots, a_r \mid b_1, \ldots, b_r); \tag{2.16}$$

c'est la *notation de Frobenius.* Avec cette notation, la partition $(4, 2, 1)$ s'écrit $(3, 0 \mid 2, 0)$. Remarquons que $a = (a_1 > \cdots > a_r)$ et $b = (b_1 > \cdots > b_r)$ sont des partitions strictement décroissantes. Pour une partition strictement décroissante $\lambda = (\lambda_1 > \cdots > \lambda_\ell > 0)$ de longueur ℓ on note λ^- la partition de rang ℓ suivante :

$$\lambda^- = (\lambda_1 - 1, \ldots, \lambda_\ell - 1 \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_\ell). \tag{2.17}$$

Par exemple, pour $\lambda = (4, 2, 1)$ la partition λ^- associée est



Avec cette notation, et pour V un espace vectoriel quelconque, on a la décomposition suivante de $\mathrm{SL}(V)$-modules :

$$\Lambda^i(\Lambda^2 V) = \bigoplus_{|\lambda| = i} S_{\lambda^-} V \tag{2.18}$$

où l'on sous-entend que les partitions λ qui indexent la somme sont strictement décroissantes, puisque si λ ne vérifie pas cette condition alors λ^- n'est pas définie.

On rappelle également la *formule de Pieri* qui décrit le produit tensoriel d'un $\mathrm{SL}(V)$-module irréductible $S_\lambda V$ par une puissance extérieure $\Lambda^i V$:

$$S_\lambda V \otimes \Lambda^i V = \bigoplus_{\mu} S_\mu V, \tag{2.19}$$

où la somme est indexée par les partitions μ obtenues en ajoutant i cases à λ sur i lignes différentes.

2.3.8. On revient au calcul des espaces de sections globales de l'équation (2.15). Pour alléger un peu les formules, on va écrire pour le reste de cette partie G au lieu de $G(k, 2n + 1)$ et G_ω au lieu de $G_\omega(k, 2n + 1)$.

Le complexe de Koszul associé à ω est

$$0 \longrightarrow \Lambda^r(\Lambda^2 T) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Lambda^2(\Lambda^2 T) \longrightarrow \Lambda^2 T \xrightarrow{\omega} \mathcal{O}_G \longrightarrow \mathcal{O}_{G_\omega} \longrightarrow 0 \qquad (2.20)$$

où $r = k(k-1)/2$ est le rang de $\Lambda^2 T$; ce complexe est exact puisque ω est générique. En tensorisant par le fibré tangent TG de la grassmannienne G on obtient donc une résolution de la restriction $TG|_{G_\omega}$ de TG à la grassmannienne symplectique impaire G_ω :

$$0 \longrightarrow \Lambda^r(\Lambda^2 T) \otimes TG \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Lambda^2(\Lambda^2 T) \otimes TG \longrightarrow \Lambda^2 T \otimes TG \xrightarrow{\omega} TG \longrightarrow TG|_{G_\omega} \longrightarrow 0. \qquad (2.21)$$

Lemme 2.3.9. *Si $j \geqslant 1$, on a $H^i(G, \Lambda^j(\Lambda^2 T) \otimes TG) = 0$ pour tout i.*

PREUVE. Le fibré tangent de la grassmannienne TG est isomorphe au fibré $\mathrm{Hom}(T, Q) = T^* \otimes Q$. Par conséquent, tenant compte aussi de la formule (2.18), on a

$$\Lambda^j(\Lambda^2 T) \otimes TG = Q \otimes \bigoplus_{|\lambda|=j} S_{\lambda^-} T \otimes T^*. \qquad (2.22)$$

Si $\nu = (\nu_1 \geqslant \cdots \geqslant \nu_k)$ est une partition alors d'après la formule de Pieri le produit tensoriel $S_\nu T \otimes T^*$ s'écrit

$$S_\nu T \otimes T^* = S_\nu T \otimes \Lambda^{k-1} T \otimes \det T^* = \bigoplus_\mu S_\mu T \qquad (2.23)$$

où la somme est indexée par toutes les partitions gauches μ de longueur au plus k obtenues en enlevant une case à ν, autrement dit $\mu = (\mu_1 \geqslant \cdots \geqslant \mu_k)$ et il existe $1 \leqslant i \leqslant k$ tel que $\mu_i = \nu_i - 1$ et $\mu_a = \nu_a$ pour tous $a \neq i$. Par exemple, pour $\nu = (4,2,2)$ on a $S_\nu T \otimes T^* = S_{(3,2,2)} T \oplus S_{(4,2,1)} T \oplus S_{(4,2,2,0,\ldots,0,-1)} T$.

Une composante irréductible de $\Lambda^j(\Lambda^2 T) \otimes TG$ est donc de la forme $E_\eta = Q \otimes S_\mu T$ où μ est obtenue en enlevant une case à λ^- pour une certaine partition λ strictement décroissante et de poids j. On a

$$\eta = (1, 0, \ldots, 0, \mu_1, \ldots, \mu_k)$$

et donc

$$\eta + \rho = (2n+2, 2n, 2n-1, \ldots, k+1, \mu_1 + k, \ldots, \mu_k + 1).$$

La longueur de λ^- est $\ell(\lambda^-) = \lambda_1 + 1$. Comme T est de rang k, on a $\ell(\lambda^-) \leqslant k$, sinon $S_{\lambda^-} T = 0$, donc $\lambda_1 \leqslant k-1$. De même, par la construction de μ on a $\mu_1 = \lambda_1^-$ ou $\mu_1 = \lambda_1^- - 1$, autrement dit $\mu_1 = \lambda_1$ ou $\mu_1 = \lambda_1 - 1$. En conséquence, $\mu_1 + k \leqslant \lambda_1 + k \leqslant k - 1 + k \leqslant 2n - 1 \leqslant 2n$. Par ailleurs, $\mu_1 \geqslant 1$ puisque pour avoir $\mu_1 = 0$ on devrait avoir $\lambda_1 = 1$, c'est-à-dire $\lambda = \square$ et alors $\lambda^- = \begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}$ ce qui donne, en éliminant une case, les partitions $\square$ et $(1,1,0,\ldots,0,-1)$ dont aucune n'a la première part nulle. On a donc

$$k + 1 \leqslant \mu_1 + k \leqslant 2n$$

et par conséquence le poids $\eta + \rho$ est singulier, ce qui, par le théorème de Bott, achève la démonstration. ■

Notons $\mathscr{F}$ le noyau de la flèche $TG \longrightarrow TG|_{G_\omega}$ de (2.21) de sorte qu'on a les suites exactes de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow TG \longrightarrow TG|_{G_\omega} \longrightarrow 0 \qquad (2.24)$$

$$0 \longrightarrow \Lambda^r(\Lambda^2 T) \otimes TG \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Lambda^2(\Lambda^2 T) \otimes TG \longrightarrow \Lambda^2 T \otimes TG \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0. \qquad (2.25)$$

Alors, en découpant (2.25) en suites exactes courtes et en prenant les suites longues de cohomologie, on déduit par le lemme précédent que $H^i(G, \mathscr{F}) = 0$ pour tout i. Il s'ensuit, par la suite longue de cohomologie de (2.24), que

$$H^i(G_\omega, TG|_{G_\omega}) = H^i(G, TG) \text{ pour tout } i. \tag{2.26}$$

Or le fibré tangent TG est irréductible $TG = T^* \otimes Q = E_{(1,0,\ldots,0,-1)}$ et donc par le théorème de Bott sa cohomologie est

$$\begin{aligned} &H^0(G, TG) = V_{(1,0,\ldots,0,-1)} = \mathfrak{sl}(2n+1, \mathbb{C}) \\ &H^i(G, TG) = 0 \text{ pour } i \geqslant 1. \end{aligned} \tag{2.27}$$

On a donc déterminé la cohomologie de la restriction $TG|_{G_\omega}$. On passe maintenant à la détermination de la cohomologie de la restriction de $\Lambda^2 T^*$ à la grassmannienne symplectique impaire G_ω.

On tensorise par $\Lambda^2 T^*$ le complexe de Koszul de ω, pour obtenir la résolution suivante de $\Lambda^2 T^*|_{G_\omega}$:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \Lambda^r(\Lambda^2 T) \otimes \Lambda^2 T^* \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Lambda^2(\Lambda^2 T) \otimes \Lambda^2 T^* \longrightarrow \\ \longrightarrow \Lambda^2 T \otimes \Lambda^2 T^* \longrightarrow \Lambda^2 T^* \longrightarrow \Lambda^2 T^*|_{G_\omega} \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Lemme 2.3.10. *Pour $j \geqslant 2$, on a $H^i(G, \Lambda^j(\Lambda^2 T) \otimes \Lambda^2 T^*) = 0$ pour tout i.*

PREUVE. Par la formule (2.18) on a la décomposition

$$\Lambda^j(\Lambda^2 T) \otimes \Lambda^2 T^* = \bigoplus_{|\lambda|=j} S_{\lambda^-} T \otimes \Lambda^2 T^*.$$

Si ν est une partition, par la formule de Pieri le produit tensoriel $S_\nu T \otimes \Lambda^2 T^*$ s'écrit

$$S_\nu T \otimes \Lambda^2 T^* = S_\nu T \otimes \Lambda^{k-2} T \otimes \det T^* = \bigoplus_\mu S_\mu T$$

où la somme est indexée par toutes les partitions gauches μ obtenues en enlevant à ν deux cases situées sur deux lignes différentes ; en particulier, on a $\mu_1 = \nu_1$ ou $\mu_1 = \nu_1 - 1$.

Les composantes irréductibles de $\Lambda^j(\Lambda^2 T) \otimes \Lambda^2 T^*$ sont donc de la forme $E_\eta = S_\mu T$ avec μ obtenue par cette recette à partir de λ^- pour une certaine partition λ strictement décroissante et de poids j. En particulier $\mu_1 = \lambda_1^- = \lambda_1$ ou $\mu_1 = \lambda_1^- - 1 = \lambda_1 - 1$. On a

$$\eta = (0, \ldots, 0, \mu_1, \ldots, \mu_k)$$

et

$$\eta + \rho = (2n+1, 2n, \ldots, k+1, \mu_1 + k, \ldots, \mu_k + 1).$$

Par le même argument que dans la démonstration du lemme 2.3.9, on obtient que le poids $\eta + \rho$ est singulier si $\mu_1 \geqslant 1$, ce qui est bien le cas puisque pour avoir $\mu_1 = 0$ on doit avoir $\lambda = \square$ et on a supposé $j = |\lambda| \geqslant 2$. Le théorème de Bott achève alors la démonstration. ■

Pour $j = 1$ on a par la formule de Pieri (cf. aussi la démonstration précédente) :

$$\Lambda^2 T \otimes \Lambda^2 T^* = \mathbb{C} \oplus S_{(1,0,\dots,0,-1)} T \oplus S_{(0,\dots,0,-1,-1)} T.$$

Les poids

$$\begin{gathered}(0,\dots,0,1,0,\dots,0,-1) + \rho \\ (0,\dots,0,0,\dots,0,-1,-1) + \rho\end{gathered}$$

sont singuliers, donc par le théorème de Bott on a

$$\begin{aligned}&H^0(G, \Lambda^2 T \otimes \Lambda^2 T^*) = H^0(G, \operatorname{End}(\Lambda^2 T)) = \mathbb{C} \cdot \mathrm{Id} \\ &H^i(G, \Lambda^2 T \otimes \Lambda^2 T^*) = 0 \text{ pour } i \geqslant 1.\end{aligned}$$

Enfin, toujours par le théorème de Bott on a

$$\begin{aligned}&H^0(G, \Lambda^2 T^*) = \Lambda^2 (\mathbb{C}^{2n+1})^* \\ &H^i(G, \Lambda^2 T^*) = 0 \text{ pour } i \geqslant 1.\end{aligned}$$

Notons $\mathscr{G}$ et $\mathscr{H}$ les noyaux des flèches $\Lambda^2 T \otimes \Lambda^2 T^* \longrightarrow \Lambda^2 T^*$, respectivement $\Lambda^2 T^* \longrightarrow \Lambda^2 T^*|_{G_\omega}$, de (2.28) de sorte qu'on ait

$$0 \longrightarrow \Lambda^r(\Lambda^2 T) \otimes \Lambda^2 T^* \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Lambda^2(\Lambda^2 T) \otimes \Lambda^2 T^* \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow 0 \tag{2.29}$$

$$0 \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \Lambda^2 T \otimes \Lambda^2 T^* \longrightarrow \mathscr{H} \longrightarrow 0 \tag{2.30}$$

$$0 \longrightarrow \mathscr{H} \longrightarrow \Lambda^2 T^* \longrightarrow \Lambda^2 T^*|_{G_\omega} \longrightarrow 0 \tag{2.31}$$

Alors, en décomposant (2.29) en suites exactes courtes et en prenant les suites longues de cohomologie, on déduit par le lemme précédent que $H^i(G, \mathscr{G}) = 0$ pour tout i. Par les suites longues de cohomologie de (2.30) et (2.31) on obtient alors

$$H^i(G, \mathscr{H}) = H^i(G, \Lambda^2 T \otimes \Lambda^2 T^*) = \begin{cases} \mathbb{C} \cdot \mathrm{Id}, & \text{pour } i = 0 \\ 0 & \text{pour } i \geqslant 1 \end{cases}$$

respectivement

$$\begin{gathered}0 \longrightarrow \mathbb{C} \cdot \mathrm{Id} \xrightarrow{\omega} \Lambda^2 (\mathbb{C}^{2n+1})^* \longrightarrow H^0(G_\omega, \Lambda^2 T^*|_{G_\omega}) \longrightarrow 0 \\ H^i(G_\omega, \Lambda^2 T^*|_{G_\omega}) = 0, \text{ pour } i \geqslant 1.\end{gathered}$$

On a donc $H^0(G_\omega, \Lambda^2 T^*|_{G_\omega}) = \Lambda^2(\mathbb{C}^{2n+1})^* / \mathbb{C} \cdot \omega$. Rappelons la suite exacte (2.14) :

$$0 \longrightarrow TG_\omega \longrightarrow TG|_{G_\omega} \xrightarrow{d\omega} \Lambda^2 T^*|_{G_\omega} \longrightarrow 0.$$

D'après ce qui vient d'être dit et d'après la formule (2.27) la suite longue de cohomologie associée à cette suite nous donne :

$$\begin{gathered}0 \longrightarrow H^0(G_\omega, TG_\omega) \longrightarrow \mathfrak{sl}(2n+1, \mathbb{C}) \xrightarrow{d\omega} \Lambda^2(\mathbb{C}^{2n+1})^* / \mathbb{C} \cdot \omega \longrightarrow H^1(G_\omega, TG_\omega) \longrightarrow 0, \\ H^i(G_\omega, TG_\omega) = 0 \text{ pour } i \geqslant 2.\end{gathered}$$

Rappelons la notation $E = \mathbb{C}^{2n+1}$.

Lemme 2.3.11. *La flèche $d\omega : \mathfrak{sl}(E) \to \Lambda^2 E^*/\omega$ ci-dessus est la composition*

$$\mathfrak{sl}(E) \hookrightarrow \mathrm{End}(E) = E^* \otimes E \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\omega} E^* \otimes E^* \longrightarrow \Lambda^2 E^* \longrightarrow \Lambda^2 E^*/\omega \tag{2.32}$$

c'est-à-dire que, pour $X \in \mathfrak{sl}(E)$, on a

$$d\omega(X) = [(u,v) \longmapsto \omega(u, Xv) + \omega(Xu, v)] \mod \omega. \tag{2.33}$$

PREUVE. La fibre au-dessus d'un point $V \in G$ du fibré $TG \simeq T^* \otimes Q$ s'identifie à $\mathrm{Hom}(V, E/V)$ et la valeur en V d'une section globale $X \in \mathfrak{sl}(E) = H^0(G, TG)$ est la composition

$$V \hookrightarrow E \xrightarrow{X} E \longrightarrow E/V.$$

La fibre en V du fibré $\Lambda^2 T^*$ est $\Lambda^2 V^*$ et si V est isotrope alors la valeur en V d'une section globale $[\theta] \mod \omega$ dans $\Lambda^2 E^*/\omega = H^0(G_\omega, \Lambda^2 T^*|_{G_\omega})$ est la restriction $\theta|_V \in \Lambda^2 V^*$. Toujours si V est isotrope, ω induit une application $E/V^\perp \to V^*$ et donc une application $E/V \to V^*$, qu'on va encore noter ω, de sorte que le carré suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\omega} & E^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ E/V & \xrightarrow{\omega} & V^*. \end{array}$$

Cela montre que pour démontrer le lemme il suffit de montrer que le morphisme $d\omega : TG|_{G_\omega} \to \Lambda^2 T^*|_{G_\omega}$ est donné, au-dessus d'un point $V \in G_\omega$, par la composition

$$V^* \otimes E/V \xrightarrow{\omega} V^* \otimes V^* \longrightarrow \Lambda^2 V^*$$

c'est-à-dire pour $X \in \mathrm{Hom}(V, E/V)$

$$d\omega(X) \cdot (u,v) = \omega(u, Xv) + \omega(Xu, v), \text{ pour tous } u, v \in V. \tag{2.34}$$

Soit $V_0 \in G_\omega$, $W \subset E$ un supplémentaire de V_0, et Ω l'ouvert affine standard de G défini par $\Omega = \{V \in G \mid V \cap W = (0)\}$. En fixant une base de V_0, on définit de la manière habituelle[6] une base $\{v_1(V), \ldots, v_k(V)\}$ dans V pour tout $V \in \Omega$, autrement dit un repère trivialisant pour le fibré tautologique T au-dessus de Ω. Alors $v_i(V)^* \wedge v_j(V)^*$, $1 \leqslant i < j \leqslant k$ est un repère trivialisant pour $\Lambda^2 T^*$ sur Ω et si ω_{ij} sont les composantes de $\omega|_\Omega$ dans ce repère, alors le morphisme $d\omega$ est donné, au-dessus de Ω, par

$$d\omega(X) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k} d_V \omega_{ij}(X)\, v_i(V)^* \wedge v_j(V)^* \text{ pour tous } V \in \Omega,\ X \in T_V G.$$

Pour calculer les $d_V \omega_{ij}(X)$ on utilise la description géométrique suivante de l'isomorphisme $T_V G \simeq \mathrm{Hom}(V, E/V)$ (cf. [Har95, 16.1]) : pour $X \in T_V G$ et $v \in V$, soit $V(t)$, $t \in \mathbb{C}$, un arc holomorphe dans G tel que $V(0) = V$ et $\dot{V}(0) = X$, et soit $v(t)$ un arc holomorphe dans E tel que $v(0) = v$ et $v(t) \in V(t)$ pour tout t, alors $Xv = [\dot{v}(0)] \mod V$.

[6] Si $\{v_1, \ldots, v_k\}$ est la base de V_0 alors la droite $\mathbb{C}v_i(V)$ est $V \cap (\mathbb{C}v_i \oplus W)$ et $v_i(V)$ est l'unique vecteur de cette droite dont la coordonnée de v_i est 1.

Soit donc $V \in \Omega$ et $X \in T_V G$, et soit $V(t)$ un arc holomorphe dans G tel que $V(0) = V$ et $\dot{V}(0) = X$. Alors $v_i(V(t))$ est un arc holomorphe dans E qui vérifie $v_i(V(t)) \in V(t)$ pour tout $t \in \mathbb{C}$, donc

$$Xv_i(V) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} v_i(V(t)) = d_V v_i(X).$$

Alors, puisque $\omega_{ij}(V) = \omega(v_i(V), v_j(V))$, on a

$$\begin{aligned} d_V\omega_{ij}(X) &= \omega(v_i(V), d_V v_j(X)) + \omega(d_V v_i(X), v_j(V)) \\ &= \omega(v_i(V), Xv_j(V)) + \omega(Xv_i(V), v_j(V)) \end{aligned}$$

et donc

$$d\omega(X) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k} \big[\omega(v_i(V), Xv_j(V)) + \omega(Xv_i(V), v_j(V))\big] v_i(V)^* \wedge v_j(V)^*$$

ce qui est exactement (2.34). ■

La forme bilinéaire antisymétrique

$$(u, v) \longmapsto \omega(u, Xv) + \omega(Xu, v)$$

qui apparaît dans (2.33) n'est rien d'autre que la transformée $X \cdot \omega$ de ω par $X \in \mathfrak{gl}(E)$, correspondant à la structure de $\mathfrak{gl}(E)$-module de $\Lambda^2 E^*$. Une autre façon d'écrire l'application $d\omega : \mathfrak{sl}(E) \to \Lambda^2 E^*/\omega$ du lemme 2.3.11 est donc

$$d\omega(X) = [X \cdot \omega] \bmod \omega, \quad X \in \mathfrak{sl}(E).$$

On en déduit que le noyau $H^0(G_\omega, TG_\omega)$ est

$$H^0(G_\omega, TG_\omega) = \{X \in \mathfrak{sl}(E) \mid X \cdot \omega \in \mathbb{C}\omega\}.$$

Or on a $\mathrm{Id}.\omega = 2\omega$ et $\{X \in \mathfrak{gl}(E) \mid X \cdot \omega = 0\} = \mathfrak{sp}_{2n+1}$ est l'algèbre de Lie de Sp_{2n+1}, donc $\mathfrak{sp}_{2n+1}$ et $H^0(G_\omega, TG_\omega)$ sont tous les deux des supplémentaires de $\mathbb{C}\mathrm{Id}$ dans $\{X \in \mathfrak{gl}(E) \mid X \cdot \omega \in \mathbb{C}\omega\}$[7]. Ils s'identifient donc au quotient $\{X \in \mathfrak{gl}(E) \mid X \cdot \omega \in \mathbb{C}\omega\}/\mathbb{C}\mathrm{Id}$, non seulement comme espaces vectoriels mais aussi comme algèbres de Lie, puisque $\mathbb{C}\mathrm{Id}$ est inclus dans le centre de l'algèbre de Lie $\{X \in \mathfrak{gl}(E) \mid X \cdot \omega \in \mathbb{C}\omega\}$. On a ainsi obtenu le résultat suivant :

Proposition 2.3.12. *L'algèbre de Lie du groupe d'automorphismes de la grassmannienne symplectique impaire $G_\omega(k, 2n+1)$ est $\mathfrak{sp}_{2n+1}$.*

Puisque le noyau de l'application $d\omega : \mathfrak{sl}(E) \to \Lambda^2 E^*/\omega$ est isomorphe à $\mathfrak{sp}_{2n+1}$ qui est de dimension $(2n+1)(n+1)$ (cf. le corollaire 1.1.5), on obtient par un calcul de dimension que cette application est surjective. Par conséquent, on a la proposition suivante :

Proposition 2.3.13. $H^1(G_\omega, TG_\omega) = 0$.

Ceci signifie que la grassmannienne symplectique impaire G_ω n'a pas de déformation non triviale.

[7] $\{X \in \mathfrak{gl}(E) \mid X \cdot \omega \in \mathbb{C}\omega\}$ est l'algèbre de Lie du stabilisateur dans $\mathrm{GL}(E)$ du point $[\omega] \in \mathbb{P}\Lambda^2 E^*$.

2.3.2 La deuxième approche

Cette deuxième approche s'inspire de la méthode classique de calcul du groupe d'automorphismes de la grassmannienne usuelle qui est décrite dans ([Har95, 10.19]). Plus précisément, le plan de notre preuve est le suivant : on démontre, dans un premier temps, que la grassmannienne symplectique impaire est linéairement normale, ce qui avec le fait que son groupe de Picard est $\mathbb{Z}$ montre que ses automorphismes sont induits par des automorphismes de l'espace projectif ambiant. Un automorphisme de $G_\omega(k, 2n+1)$ induit donc des automorphismes des variétés de sous-espaces linéaires contenus dans $G_\omega(k, 2n+1)$, c'est-à-dire des schémas de Fano de $G_\omega(k, 2n+1)$. On montre alors qu'un certain schéma de Fano de $G_\omega(k, 2n+1)$ est isomorphe à l'éclatement de $G_\omega(k-1, 2n+1)$ le long de son Sp_{2n+1}-orbite fermée, et qu'un automorphisme de $G_\omega(k, 2n+1)$ induit donc un automorphisme de $G_\omega(k-1, 2n+1)$. En itérant ce raisonnement, un automorphisme de $G_\omega(k, 2n+1)$ induit un automorphisme de $G_\omega(1, 2n+1) = \mathbb{P}^{2n}$, c'est-à-dire un élément de $\mathrm{PSL}(2n+1, \mathbb{C})$. On montre ensuite que, puisqu'il provient d'un automorphisme de $G_\omega(2, 2n+1)$, cet élément est dans PSp_{2n+1}, et enfin, que l'automorphisme qu'il induit sur $G_\omega(k, 2n+1)$ est l'automorphisme de départ.

2.3.14. On note $E = \mathbb{C}^{2n+1}$. On désigne par $\Lambda^{\langle k \rangle} E$ le noyau de la contraction par ω

$$\Lambda^{\langle k \rangle} E = \mathrm{Ker}\left(\Lambda^k E \xrightarrow{\llcorner \omega} \Lambda^{k-2} E \right).$$

La grassmannienne symplectique impaire $G_\omega(k, 2n+1)$ est une sous-variété de la grassmannienne usuelle et cette dernière est un fermé de $\mathbb{P}\Lambda^k E$ via le plongement de Plücker.

Proposition 2.3.15. $G_\omega(k, E) = G(k, E) \cap \mathbb{P}\Lambda^{\langle k \rangle} E$.

PREUVE. Soit $V \in G(k, E)$ et $\{v_1, \ldots, v_k\}$ une base de V. La contraction de $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ par ω est donnée explicitement par

$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) \llcorner \omega = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k} (-1)^{i+j} \omega(v_i, v_j) v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v_i} \wedge \cdots \wedge \widehat{v_j} \wedge \cdots \wedge v_k$$

donc $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ est dans le noyau de la contraction $\llcorner \omega$ si et seulement si V est isotrope. ■

La contraction $\llcorner \omega : \Lambda^k E \to \Lambda^{k-2} E$ est surjective (cela découle par exemple de la formule (2.39) ci-dessous) et donc un calcul de dimension montre que l'intersection $G(k, E) \cap \mathbb{P}\Lambda^{\langle k \rangle} E$ est loin d'être transverse.

Proposition 2.3.16. *L'inclusion $G_\omega(k, E) \subset \mathbb{P}\Lambda^{\langle k \rangle} E$ est linéairement normale, c'est-à-dire que le morphisme de restriction*

$$H^0\big(\mathbb{P}\Lambda^{\langle k \rangle} E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}\Lambda^{\langle k \rangle} E}(1)\big) \longrightarrow H^0\big(G_\omega(k, E), \mathcal{O}_{G_\omega(k,E)}(1)\big)$$

est surjectif.

Bien que cela ne soit pas nécessaire pour la preuve, on mentionne le théorème suivant qui est une forme partielle d'un théorème de Bott pour le groupe $\mathrm{GL}(2n+1, \mathbb{C})$ sur la grassmannienne $G(k, 2n+1)$.

Théorème 2.3.17. *Soit $\lambda = (\lambda_0 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{2n})$ une partition gauche*[8] *et soit E_λ le $\mathrm{GL}(2n+1,\mathbb{C})$-fibré irréductible associé sur la grassmannienne $G(k, 2n+1)$, c'est-à-dire*

$$E_\lambda = S_{\lambda'}Q \otimes S_{\lambda''}T$$

où λ' et λ'' sont les partitions gauches $\lambda_0 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{2n-k}$, respectivement $\lambda_{2n-k+1} \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{2n}$. Alors $H^0(G(k, 2n+1), E_\lambda)$ est le $\mathrm{GL}(2n+1,\mathbb{C})$-module irréductible V_λ de plus haut poids λ et $H^i(G(k, 2n+1), E_\lambda) = 0$ pour tout $i \geqslant 1$.

PREUVE DU THÉORÈME 2.3.17. En prenant la restriction à $\mathrm{SL}(2n+1,\mathbb{C})$ de la structure de $\mathrm{GL}(2n+1,\mathbb{C})$-fibré de E_λ on obtient par le théorème de Bott usuel que $H^i(G(k, 2n+1), E_\lambda) = 0$ pour $i \geqslant 1$ et que $H^0(G(k, 2n+1), E_\lambda)$ est isomorphe en tant que $\mathrm{SL}(2n+1,\mathbb{C})$-module à la puissance de Schur $S_\lambda(\mathbb{C}^{2n+1})$. Cela nous précise la structure de $\mathrm{GL}(2n+1,\mathbb{C})$-module de $H^0(G(k, 2n+1), E_\lambda)$ à une puissance de la représentation déterminant $\Lambda^{2n+1}\mathbb{C}^{2n+1}$ près (cf. 2.3.4). Autrement dit, $H^0(G(k, 2n+1), E_\lambda)$ est isomorphe en tant que $\mathrm{GL}(2n+1,\mathbb{C})$-module à une puissance de Schur $S_\mu(\mathbb{C}^{2n+1})$ donnée par une partition gauche μ qui diffère de λ par un décalage, c'est-à-dire qui est telle que $\mu_i = \lambda_i + a$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant 2n$ où a est un entier.

Pour déterminer a il suffit de regarder l'action dans $H^0(G(k, 2n+1), E_\lambda)$ des homothéties $t\mathrm{Id} \in \mathrm{GL}(2n+1,\mathbb{C})$, $t \in \mathbb{C}^*$. Soit $s \in H^0(G(k, 2n+1), E_\lambda)$ un élément non nul (par exemple un vecteur de plus haut poids). Alors $t\mathrm{Id} \cdot s = t^{|\mu|} \cdot s$. Par ailleurs, soit $V \in G(k, 2n+1)$ un point où s ne s'annule pas. Alors $t\mathrm{Id}$ agit dans la fibre de E_λ au point V comme l'homothétie de rapport $t^{|\lambda|}$ et on a donc

$$t^{|\mu|} \cdot s(V) = (t\mathrm{Id} \cdot s)(V) = t\mathrm{Id}(s(V)) = t^{|\lambda|} \cdot s(V)$$

d'où $|\mu| = |\lambda|$ et donc $\mu = \lambda$. ■

On revient à la proposition 2.3.16.

PREUVE DE LA PROPOSITION 2.3.16. Pour alléger les notations, on désigne par G la grassmannienne usuelle $G(k, E)$ et par G_ω la grassmannienne symplectique impaire $G_\omega(k, E)$. La grassmannienne usuelle G est plongée dans $\mathbb{P}\Lambda^k E$ par le fibré en droites $\det T^*$, autrement dit $\mathcal{O}_G(1) = \det T^*$.

On considère à nouveau le complexe de Koszul de ω que l'on tord par $\det T^*$ pour obtenir le complexe

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \Lambda^r(\Lambda^2 T) \otimes \det T^* \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Lambda^2(\Lambda^2 T) \otimes \det T^* \longrightarrow \\ \longrightarrow \Lambda^2 T \otimes \det T^* \longrightarrow \det T^* \longrightarrow \det T^*|_{G_\omega} \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Par la formule (2.18), on a

$$\Lambda^j(\Lambda^2 T) \otimes \det T^* = \bigoplus_{|\lambda|=j} S_{\lambda^-}T \otimes \det T^*$$

donc une composante irréductible de $\Lambda^j(\Lambda^2 T) \otimes \det T^*$ est de la forme $E_\eta = S_\mu T$ où $\mu = (\mu_1 \geqslant \cdots \geqslant \mu_k)$ est la partition gauche donnée par $\mu_i = \lambda_i^- - 1$, $1 \leqslant i \leqslant k$, pour une certaine partition λ strictement décroissante et de poids j. Alors

$$\eta = (0, 0, \ldots, 0, \mu_1, \ldots, \mu_k)$$

[8] Cf. le n° 2.3.4.

et comme dans la démonstration du lemme 2.3.10, le poids

$$\eta + \rho = (2n+1, 2n, \ldots, k+1, \mu_1 + k, \ldots, \mu_k + 1)$$

est singulier dès que $j \geqslant 2$. On a donc, si $j \geqslant 2$,

$$H^i(G, \Lambda^j(\Lambda^2 T) \otimes \det T^*) = 0 \text{ pour tout } i\ ;$$

par conséquent, si $\mathscr{F}$ est le noyau du morphisme $\Lambda^2 T \otimes \det T^* \to \det T^*$ de (2.35), de sorte que l'on a les suites exactes

$$0 \longrightarrow \Lambda^r(\Lambda^2 T) \otimes \det T^* \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Lambda^2(\Lambda^2 T) \otimes \det T^* \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0 \tag{2.36}$$
$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \Lambda^2 T \otimes \det T^* \longrightarrow \det T^* \longrightarrow \det T^*|_{G_\omega} \longrightarrow 0, \tag{2.37}$$

alors $H^i(G, \mathscr{F}) = 0$ pour tout i. Ensuite, on a $\Lambda^2 T \otimes \det T^* = \Lambda^{k-2} T^*$ donc

$$H^0(G, \Lambda^2 T \otimes \det T^*) = \Lambda^{k-2} E^*$$
$$H^i(G, \Lambda^2 T \otimes \det T^*) = 0 \text{ pour } i \geqslant 1\ ;$$

de même,

$$H^0(G, \det T^*) = \Lambda^k E^*$$
$$H^i(G, \det T^*) = 0 \text{ pour } i \geqslant 1.$$

Notons que d'après le théorème 2.3.17 ce sont des isomorphismes de $\mathrm{GL}(E)$-modules.

Soit $\mathscr{G}$ le noyau du morphisme $\det T^* \to \det T^*|_{G_\omega}$ de (2.37) de sorte que l'on a les suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \Lambda^2 T \otimes \det T^* \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \det T^* \longrightarrow \det T^*|_{G_\omega} \longrightarrow 0.$$

Alors $H^i(G, \mathscr{G}) = H^i(G, \Lambda^2 T \otimes \det T^*)$ pour tout i, en particulier $H^1(G, \mathscr{G}) = 0$, d'où la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Lambda^{k-2} E^* \xrightarrow{\cdot \omega} \Lambda^k E^* \longrightarrow H^0(G_\omega, \det T^*|_{G_\omega}) \longrightarrow 0. \tag{2.38}$$

Ceci montre déjà que le morphisme de restriction $H^0(G, \mathcal{O}_G(1)) \to H^0(G_\omega, \mathcal{O}_{G_\omega}(1))$ est surjectif, donc que le plongement défini par $\mathcal{O}_{G_\omega}(1)$ est linéairement normal. ■

Notons que la suite (2.38) est Sp_{2n+1}-équivariante, et considérons la suite duale

$$0 \longrightarrow H^0(G_\omega, \det T^*|_{G_\omega})^* \longrightarrow \Lambda^k E \xrightarrow{\llcorner \omega} \Lambda^{k-2} E \longrightarrow 0. \tag{2.39}$$

La contraction $\llcorner\omega : \Lambda^k E \to \Lambda^{k-2} E$ est donc surjective et le Sp_{2n+1}-module $H^0(G_\omega, \det T^*|_{G_\omega})$ est isomorphe au dual $(\Lambda^{\langle k \rangle} E)^*$.[9] En particulier, $G_\omega(k, E)$ est une sous-variété non dégénérée de $\mathbb{P}\Lambda^{\langle k \rangle} E$. On a alors la proposition suivante :

Proposition 2.3.18. *Tout automorphisme de la grassmannienne symplectique impaire $G_\omega(k, E)$ est induit par un automorphisme de l'espace projectif ambiant $\mathbb{P}\Lambda^{\langle k \rangle} E$.*

[9] Sans le théorème 2.3.17 on aurait connu ce Sp_{2n+1}-module seulement modulo une puissance du déterminant $\Lambda^{2n+1} E$.

Preuve. Ceci est une conséquence, par un raisonnement standard (cf. [Har77, Exemple 7.1.1]), du fait que $\mathrm{Pic}(G_\omega(k,E)) = \mathbb{Z}$, et que $G_\omega(k,E)$ est une sous-variété non dégénérée et linéairement normale de $\mathbb{P}\Lambda^{\langle k\rangle}E$. ■

Notons $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}\Lambda^{\langle k\rangle}E, G_\omega(k,E))$ le groupe des automorphismes de $\mathbb{P}\Lambda^{\langle k\rangle}E$ qui préservent $G_\omega(k,E)$. La proposition précédente montre que le morphisme canonique

$$\mathrm{Aut}\left(\mathbb{P}\Lambda^{\langle k\rangle}E, G_\omega(k,E)\right) \to \mathrm{Aut}\left(G_\omega(k,E)\right)$$

est un isomorphisme (l'injectivité vient de ce que $G_\omega(k,E)$ est non dégénérée). On a également un morphisme naturel

$$\mathrm{PSp}_{2n+1} \to \mathrm{Aut}\left(\mathbb{P}\Lambda^{\langle k\rangle}E, G_\omega(k,E)\right)$$

qui est injectif, puisque chaque droite de E est l'intersection des k-plans isotropes qui la contiennent. On montre dans la suite que ce morphisme est surjectif, ce qui achèvera la démonstration de la proposition 2.3.1.

2.3.19. On commence par rappeler dans la proposition suivante la description des espaces linéaires contenus dans la grassmannienne usuelle $G(k,E)$, que l'on voit comme d'habitude comme sous-variété de $\mathbb{P}\Lambda^k E$ via le plongement de Plücker.

Proposition 2.3.20. *Un espace linéaire maximal $L \subset \mathbb{P}\Lambda^k E$ contenu dans la grassmannienne $G(k,E)$ est soit de la forme $L = \{V \in G(k,E) \mid V \supset V^{k-1}\}$ pour un certain sous-espace $V^{k-1} \subset E$ de dimension $k-1$, soit de la forme $L = \{V \in G(k,E) \mid V \subset V^{k+1}\}$ pour un sous-espace $V^{k+1} \subset E$ de dimension $k+1$. En particulier les espaces linéaires contenus dans la grassmannienne sont de la forme $\{V \in G(k,E) \mid V^a \subset V \subset V^b\} \simeq \mathbb{P}^{b-a-1}$ pour des sous-espaces $V^a \subset V^b \subset E$ de dimensions a, respectivement b.*

Ceci repose essentiellement sur le fait que la grassmannienne $G(k,E)$ est coupée par des quadriques dans $\mathbb{P}\Lambda^k E$ ce qui a pour conséquence qu'une droite $\langle V, W\rangle$ engendrée par deux points V, W de la grassmannienne $G(k,E)$ est contenue dans $G(k,E)$ si et seulement si elle coupe $G(k,E)$ en un troisième point, et plus généralement que l'espace linéaire $\mathbb{P}^m$ engendré par $m+1$ points de $G(k,E)$ en position générale dans $\mathbb{P}\Lambda^k E$, $V_1, \ldots, V_{m+1}$, est inclus dans $G(k,E)$ si et seulement si le 1-squelette du m-simplexe engendré par $V_1, \ldots, V_{m+1}$ est contenu dans $G(k,E)$. Pour plus de détails on pourra consulter [Har95, 6.9].

2.3.21. Puisque la grassmannienne symplectique impaire $G_\omega(k,E)$ est coupée dans $G(k,E)$ par un sous-espace linéaire (cf. la proposition 2.3.15) les espaces linéaires maximaux contenus dans $G_\omega(k,E)$ sont tout simplement les intersections de $G_\omega(k,E)$ avec les sous-espaces linéaires maximaux contenus dans $G(k,E)$.

Soit L un sous-espace linéaire maximal contenu dans $G(k,E)$ du premier type décrit dans la proposition 2.3.20, c'est-à-dire $L = \{V \in G(k,E) \mid V \supset V^{k-1}\}$ pour un certain sous-espace $V^{k-1} \subset E$ de dimension $k-1$. Si V^{k-1} n'est pas isotrope alors $L \cap G_\omega(k,E) = \emptyset$. Supposons que V^{k-1} est isotrope et soit V un point de L ; si V est isotrope alors $V \subset (V^{k-1})^\perp$ et réciproquement si $V \subset (V^{k-1})^\perp$ alors V est isotrope. On a donc

$$L \cap G_\omega(k,E) = \left\{V \in G(k,E) \mid V^{k-1} \subset V \subset (V^{k-1})^\perp\right\} \simeq \mathbb{P}\left((V^{k-1})^\perp / V^{k-1}\right).$$

Si V^{k-1} ne contient pas e_0, le noyau de ω, alors $\dim (V^{k-1})^\perp = \mathrm{codim}\, V^{k-1} = 2n-k+2$ donc $\mathbb{P}((V^{k-1})^\perp/V^{k-1}) = \mathbb{P}^{2n-2k+2}$; si V^{k-1} contient e_0 alors $\dim(V^{k-1})^\perp = 2n-k+3$ et donc $\mathbb{P}((V^{k-1})^\perp/V^{k-1}) = \mathbb{P}^{2n-2k+3}$.

Soit maintenant L un sous-espace linéaire maximal contenu dans $G(k,E)$ du second type décrit dans la proposition 2.3.20, c'est-à-dire $L = \{V \in G(k,E) \mid V \subset V^{k+1}\}$ pour un sous-espace $V^{k+1} \subset E$ de dimension $k+1$. L'intersection $L \cap G_\omega(k,E)$ est donc la grassmannienne des hyperplans isotropes de V^{k+1}. Le lemme suivant décrit les hyperplans isotropes dans un espace muni d'une 2-forme antisymétrique.

Lemme 2.3.22. *Soit W un espace muni d'une 2-forme antisymétrique non nulle ω. Si $\operatorname{rg}\omega = 2$ alors les hyperplans isotropes de W sont précisément ceux qui contiennent $\operatorname{Ker}\omega$. Si $\operatorname{rg}\omega > 2$ alors il n'y a aucun hyperplan isotrope dans W.*

PREUVE. Remarquons que si $\omega \neq 0$ alors $\operatorname{rg}\omega \geqslant 2$ puisqu'une forme antisymétrique est toujours de rang pair. On désigne encore par ω l'application canonique $\omega : W \to W^*$; on note $\perp_\omega$ pour désigner l'orthogonal par rapport à ω et $\perp$ pour désigner l'orthogonal relativement au crochet de dualité $W \otimes W^* \to \mathbb{C}$. Soit $H \subset W$ un hyperplan. Alors

$$H \text{ isotrope} \iff H \subset H^{\perp_\omega} = \omega(H)^\perp \iff H^\perp \supset \omega(H).$$

Comme $\dim H^\perp = 1$, ceci équivaut à $\omega(H) = 0$ ou $\omega(H) = H^\perp$. On ne peut pas avoir $\omega(H) = 0$ puisque $\operatorname{Ker}\omega$ est de codimension au moins 2. Si $\omega(H) = H^\perp$ alors $\operatorname{Ker}\omega \cap H$ est un hyperplan de H donc $\operatorname{codim}\operatorname{Ker}\omega \leqslant 2$ et donc $\operatorname{codim}\operatorname{Ker}\omega = 2$ d'où $\operatorname{Ker}\omega \subset H$. Ceci achève la preuve. ■

Revenons à la discussion qui précède le lemme. On a, d'après le lemme, trois possibilités selon le rang de $\omega|_{V^{k+1}}$: si V^{k+1} est isotrope alors

$$L \cap G_\omega(k,E) = L = \{V \in G(k,E) \mid V \subset V^{k+1}\} \simeq \mathbb{P}^k \;;$$

si $\operatorname{rg}(\omega|_{V^{k+1}}) = 2$ alors

$$L \cap G_\omega(k,E) = \left\{V \in G(k,E) \mid \operatorname{Ker}(\omega|_{V^{k+1}}) \subset V \subset V^{k+1}\right\} \simeq \mathbb{P}^1,$$

et si $\operatorname{rg}(\omega|_{V^{k+1}}) > 2$ alors $L \cap G_\omega(k,E) = \emptyset$. Pour résumer, on a la proposition suivante :

Proposition 2.3.23. *Les espaces linéaires maximaux contenus dans $G_\omega(k,E)$ sont des deux types suivants :*

$$\textit{type I :} \quad \left\{V \in G(k,E) \mid V^{k-1} \subset V \subset (V^{k-1})^\perp\right\} = \begin{cases} \mathbb{P}^{2(n-k)+2} & \textit{si } V^{k-1} \not\ni e_0 \\ \mathbb{P}^{2(n-k)+3} & \textit{si } V^{k-1} \ni e_0 \end{cases}$$

pour un sous-espace isotrope $V^{k-1} \subset E$ de dimension $k-1$,

$$\textit{type II :} \quad \left\{V \in G_\omega(k,E) \mid V \subset V^{k+1}\right\} = \begin{cases} \mathbb{P}^k & \textit{si } V^{k+1} \textit{ isotrope} \\ \mathbb{P}^1 & \textit{si } \operatorname{rg}(\omega|_{V^{k+1}}) = 2 \end{cases}$$

pour un sous-espace $V^{k+1} \subset E$ de dimension $k+1$.

2.3.24. Les sous-espaces linéaires qui nous seront utiles pour le calcul du groupe d'automorphismes de $G_\omega(k,E)$ sont les $\mathbb{P}^{2(n-k)+2}$ contenus dans $G_\omega(k,E)$. On rappelle la définition suivante :

Définition 2.3.25. Pour $X \subset \mathbb{P}^N$ une variété projective et $\ell \in \mathbb{N}$, le *schéma de Fano* $\mathbf{F}(\ell, X)$ est la variété des sous-espaces linéaires de dimension ℓ de $\mathbb{P}^N$ contenus dans X. C'est une sous-variété de la grassmannienne $\mathbb{G}(\ell, N)$ des $\mathbb{P}^\ell$ de $\mathbb{P}^N$.[10]

Ce qui nous intéresse dans la suite c'est donc le schéma de Fano $\mathbf{F}(2(n-k)+2, G_\omega(k,E))$ des $\mathbb{P}^{2(n-k)+2}$ contenus dans la grassmannienne symplectique impaire $G_\omega(k,E)$; pour alléger l'écriture on va le noter simplement $\mathbf{F}$.

Proposition 2.3.26. *Si $k < \frac{2}{3}(n+1)$ alors le schéma de Fano $\mathbf{F} = \mathbf{F}(2(n-k)+2, G_\omega(k,E))$ qui paramètre les $\mathbb{P}^{2(n-k)+2}$ contenus dans $G_\omega(k,E)$ est irréductible et isomorphe à la variété projective*

$$\mathbf{F}^1 = \left\{ (V^{k-1}, H) \in G_\omega(k-1,E) \times G(2n-k+2,E) \mid V^{k-1} \subset H \subset (V^{k-1})^\perp \right\}$$

qui s'identifie à l'éclatement de $G_\omega(k-1,E)$ le long de la Sp_{2n+1}-orbite fermée.

Si $k \geqslant \frac{2}{3}(n+1)$ alors $\mathbf{F}$ a deux composantes irréductibles disjointes : l'une est la variété $\mathbf{F}^1$ ci-dessus, l'autre est isomorphe à

$$\mathbf{F}^2 = \left\{ (W, V^{k+1}) \in G(3k-2(n+1),E) \times G_\omega(k+1,E) \mid W \subset V^{k+1} \right\}$$

et ces deux composantes ne sont pas isomorphes.

Nous allons maintenant démontrer cette proposition. Considérons un $\mathbb{P}^{2(n-k)+2}$ contenu dans $G_\omega(k,E)$; il y a un espace linéaire maximal contenu dans $G_\omega(k,E)$ qui le contient. S'il est contenu dans un espace maximal du type I (cf. la proposition. 2.3.23) on va dire que le $\mathbb{P}^{2(n-k)+2}$ est de la *première espèce* ; s'il est contenu dans un espace maximal du type II on va dire qu'il est de la *deuxième espèce*. Notons qu'un $\mathbb{P}^{2(n-k)+2}$ ne peut être simultanément de la première et de la deuxième espèce puisque l'intersection d'un espace linéaire maximal du type I avec un espace linéaire maximal du type II est contenue dans un $\mathbb{P}^1$:

$$\begin{aligned}\left\{ V \in G(k,E) \mid V^{k-1} \subset V \subset (V^{k-1})^\perp \right\} \cap \left\{ V \in G_\omega(k,E) \mid V \subset V^{k+1} \right\} \subset \\ \subset \left\{ V \in G(k,E) \mid V^{k-1} \subset V \subset V^{k+1} \right\} \simeq \mathbb{P}^1.\end{aligned}$$

Considérons un $\mathbb{P}^{2(n-k)+2}$ de la première espèce. S'il est maximal alors il est déterminé par la donnée d'un V^{k-1} isotrope de dimension $k-1$ qui ne contient pas e_0. S'il n'est pas maximal alors c'est un hyperplan dans un $\mathbb{P}^{2(n-k)+3}$ maximal du type I, autrement dit il est déterminé par la donnée d'un V^{k-1} isotrope de dimension $k-1$ qui contient e_0 et d'un hyperplan H de $(V^{k-1})^\perp$ qui contient V^{k-1} :

$$\mathbb{P}^{2(n-k)+2} = \left\{ V \in G(k,E) \mid V^{k-1} \subset V \subset H \subset (V^{k-1})^\perp \right\}.$$

Autrement dit, les $\mathbb{P}^{2(n-k)+2}$ de la première espèce sont paramétrés par la variété suivante :

$$\mathbf{F}^1 = \left\{ (V^{k-1}, H) \in G_\omega(k-1,E) \times G(2n-k+2,E) \mid V^{k-1} \subset H \subset (V^{k-1})^\perp \right\}.$$

En effet, soit $p : \mathbf{F}^1 \to G_\omega(k-1,E)$ la première projection et soit $V^{k-1} \in G_\omega(k-1,E)$. Si $V^{k-1} \not\ni e_0$ alors $\dim(V^{k-1})^\perp = 2n-k+2$ et donc la fibre $p^{-1}(V^{k-1})$ se réduit au point

[10] C'est aussi le schéma de Hilbert des sous-schémas fermés de X dont le polynôme de Hilbert est celui d'un sous-espace linéaire de dimension ℓ.

$(V^{k-1}, (V^{k-1})^\perp)$; si $V^{k-1} \ni e_0$ alors $\dim(V^{k-1})^\perp = 2n-k+3$ et la fibre $p^{-1}(V^{k-1})$ s'identifie à $\{H \mid H$ hyperplan de $(V^{k-1})^\perp, H \supset V^{k-1}\}$. Ceci montre que l'application $\mathbf{F}^1 \to \mathbf{F}$

$$(V^{k-1}, H) \longmapsto \{V \in G(k,E) \mid V^{k-1} \subset V \subset H\}$$

est un isomorphisme de $\mathbf{F}^1$ sur l'ensemble des $\mathbb{P}^{2(n-k)+2}$ de la première espèce qui sont contenus dans $G_\omega(k,E)$. Ceci implique en particulier que cet ensemble est un fermé de $\mathbf{F}$ qu'on va identifier dans la suite à $\mathbf{F}^1$.

Notons que si $k < 2(n-k)+2$, ce qui revient à $k < \frac{2}{3}(n+1)$, alors tout $\mathbb{P}^{2(n-k)+2}$ contenu dans $G_\omega(k,E)$ est de la première espèce et donc dans ce cas $\mathbf{F} = \mathbf{F}^1$.

Proposition 2.3.27. *La variété projective $\mathbf{F}^1$ est isomorphe à l'éclatement de la Sp_{2n+1}-orbite fermée de la grassmannienne symplectique impaire $G_\omega(k-1,E)$.*

PREUVE. Rappelons que la Sp_{2n+1}-orbite fermée de $G_\omega(k-1,E)$ est $X_0 = \{V \in G_\omega(k-1,E) \mid e_0 \in V\}$ et que son complément $X_1 = \{V \in G_\omega(k-1,E) \mid e_0 \notin V\}$ est la Sp_{2n+1}-orbite ouverte (cf. la proposition 2.1.5).

Comme expliqué ci-dessus, la projection naturelle $p : \mathbf{F}^1 \to G_\omega(k-1,E)$ est un isomorphisme au-dessus de l'orbite ouverte $X_1 \subset G_\omega(k-1,E)$ et c'est une fibration de fibre

$$\{H \mid H \text{ hyperplan de } (V^{k-1})^\perp, H \supset V^{k-1}\} = \mathbb{P}\big((V^{k-1})^\perp / V^{k-1}\big)^* = \mathbb{P}^{2n-2k+3}$$

au-dessus de l'orbite fermée X_0.

Puisque X_0 est de codimension $2n-2k+4$ dans $G_\omega(k-1,E)$, pour établir que $\mathbf{F}^1$ est l'éclatement de X_0 dans $G_\omega(k-1,E)$ il suffit de montrer que $\mathbf{F}^1$ est lisse (cf. [GH78, Ch. 4,§6]). On va montrer que $\mathbf{F}^1$ est le lieu d'annulation d'une section suffisamment générique d'un fibré vectoriel sur la variété de drapeaux

$$\mathbb{F}(k-1, 2n-k+2, E) = \big\{(V^{k-1}, V^{2n-k+2}) \mid V^{k-1} \subset V^{2n-k+2} \subset E\big\}.$$

Remarquons que cette variété de drapeaux est une composante connexe du schéma de Fano $\mathbf{F}(2(n-k)+2, G(k,E))$ qui paramètre les $\mathbb{P}^{2(n-k)+2}$ contenus dans la grassmannienne usuelle $G(k,E)$ (cf. la proposition 2.3.20).

Pour simplifier l'écriture, on note dans la suite $a = k-1$ et $b = 2n-k+2$. Soit T^a et T^b les fibrés tautologiques sur la variété de drapeaux $\mathbb{F}(a,b,E)$ dont les fibres au-dessus d'un point $V^\bullet = (V^a \subset V^b)$ de $\mathbb{F}(a,b,E)$ sont V^a respectivement V^b. La forme ω définit une section du fibré $(T^a)^* \otimes (T^b)^*$ dont la valeur au point $(V^a \subset V^b)$ est la restriction de ω à $V^a \times V^b$ c'est-à-dire l'image de ω par le morphisme $\Lambda^2 E^* \to E^* \otimes E^* \to (V^a)^* \otimes (V^b)^*$.

Un point $(V^a \subset V^b)$ de $\mathbb{F}(a,b,E)$ est dans $\mathbf{F}^1$ si et seulement si V^a est isotrope et $V^b \subset (V^a)^\perp$ ce qui revient à $V^b \subset (V^a)^\perp$ puisque $V^a \subset V^b$. Autrement dit $\mathbf{F}^1$ est le lieu d'annulation de la section $\omega \in H^0(\mathbb{F}(a,b,E), (T^a)^* \otimes (T^b)^*)$. Le fibré $(T^a)^* \otimes (T^b)^*$ n'est pas le fibré cherché puisqu'il est de rang trop grand ; on va le remplacer par un sous-fibré qui sera du rang approprié, et dont ω sera une section générique. Soit $\mathcal{E}$ le noyau du morphisme $(T^a)^* \otimes (T^b)^* \to S^2(T^a)^*$ donné par la composition $(T^a)^* \otimes (T^b)^* \to (T^a)^* \otimes (T^a)^* \to S^2(T^a)^*$; c'est un morphisme surjectif de fibrés vectoriels et donc $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel. On remarque que les sections de $(T^a)^* \otimes (T^b)^*$ qui proviennent de $\Lambda^2 E^*$ sont des sections de $\mathcal{E}$; c'est en particulier le cas de $\omega \in \Lambda^2 E^*$. La fibre de $\mathcal{E}$ au-dessus d'un point $(V^a \subset V^b)$ s'identifie, dans une base adaptée au drapeau $V^a \subset V^b$, aux matrices de taille $a \times b$ de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}, \quad A \text{ antisymétrique.}$$

Une telle matrice peut toujours se compléter en une matrice antisymétrique de taille $(2n+1)\times(2n+1)$

$$\begin{pmatrix} A & B & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

ce qui montre que $\mathcal{E}$ est engendré par ses sections globales qui proviennent de $\Lambda^2 E^*$. Comme ω est un élément générique de $\Lambda^2 E^*$ et comme $\mathbf{F}^1$ est non vide, on peut conclure la preuve en faisant appel au théorème de Bertini. ■

Remarque 2.3.28. On peut montrer à l'aide du théorème de Bott que toutes les sections globales du fibré $\mathcal{E}$ proviennent de $\Lambda^2 E^*$, c'est-à-dire $H^0(\mathbb{F}(a,b,E),\mathcal{E}) = \Lambda^2 E^*$.

Supposons maintenant que $k \geqslant 2(n-k)+2$, c'est-à-dire $k \geqslant \frac{2}{3}(n+1)$, et considérons un $\mathbb{P}^{2(n-k)+2}$ de la deuxième espèce contenu dans $G_\omega(k,E)$; il est inclus dans un $\mathbb{P}^k$ du type II, et donc il est défini par la donnée d'un V^{k+1} isotrope de dimension $k+1$ et d'un sous-espace de dimension $3k-2(n+1)$ de V^{k+1} :

$$\mathbb{P}^{2(n-k)+2} = \{V \in G_\omega(k,E) \mid V^{3k-2(n+1)} \subset V \subset V^{k+1}\}.$$

Ceci montre que les $\mathbb{P}^{2(n-k)+2}$ de la deuxième espèce sont paramétrés par la variété

$$\mathbf{F}^2 = \left\{(W, V^{k+1}) \in G(3k-2(n+1),E) \times G_\omega(k+1,E) \mid W \subset V^{k+1}\right\}$$

via l'application $\mathbf{F}^2 \to \mathbf{F}$:

$$(W, V^{k+1}) \longmapsto \{V \in G_\omega(k,E) \mid W \subset V \subset V^{k+1}\}.$$

La variété projective $\mathbf{F}^2$ est une fibration en grassmanniennes $G(3k-2(n+1),k+1)$ au-dessus de la grassmannienne symplectique impaire $G_\omega(k+1,E)$, elle est donc irréductible, lisse, de dimension

$$\begin{aligned}\dim \mathbf{F}^2 &= \dim G_\omega(k+1,E) + \dim G(3k-2(n+1),k+1) \\ &= (k+1)(2n-k) - \binom{k+1}{2} + [3k-2(n+1)][2(n-k)+3].\end{aligned}$$

Par ailleurs, $\mathbf{F}^1$, qui est birationnelle à la grassmannienne symplectique impaire $G_\omega(k-1,E)$, est irréductible de dimension

$$\dim \mathbf{F}^1 = \dim G_\omega(k-1,E) = (k-1)(2n-k+2) - \binom{k-1}{2}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\dim \mathbf{F}^2 - \dim \mathbf{F}^1 &= 4n-4k+2-2k+1+[3k-2(n+1)][2(n-k)+3] \\ &= [3k-2(n+1)][2(n-k)+1]-1.\end{aligned}$$

Ce nombre est nul seulement si $n=k=3$, cas où les variétés $\mathbf{F}^1$ et $\mathbf{F}^2$ sont toutes les deux de dimension 9.

Lemme 2.3.29. *Lorsque $n=k=3$, les variétés $\mathbf{F}^1$ et $\mathbf{F}^2$ ne sont pas isomorphes.*

PREUVE. On a

$$\mathbf{F}^1 = \left\{(V^2, H^5) \in G_\omega(2,7) \times G(5,7) \mid V^2 \subset H \subset (V^2)^\perp\right\}$$

et $\mathbf{F}^1$ est l'éclatement de $G_\omega(2,7)$ le long de son Sp_7-orbite fermée ; cette orbite est isomorphe à $G_\omega(1,6) \simeq \mathbb{P}^5$ donc le diviseur exceptionnel de $\mathbf{F}^1$ est une fibration en $\mathbb{P}^3$ au-dessus de $\mathbb{P}^5$.

De même,

$$\mathbf{F}^2 = \left\{(W^1, V^4) \in G(1,7) \times G_\omega(4,7) \mid W^1 \subset V^4\right\}$$

et $\mathbf{F}^2$ est une fibration en $G(1,4) \simeq \mathbb{P}^3$ sur la grassmannienne symplectique impaire $G_\omega(4,7)$.

Les variétés $\mathbf{F}^1$ et $\mathbf{F}^2$ sont donc toutes les deux lisses de dimension 9 et de groupe de Picard $\mathbb{Z}^2$. Montrons qu'elles n'ont pas la même cohomologie singulière.

Soit $p : \mathbf{F}^1 \to G_\omega(2,7)$ la projection canonique et $E = p^{-1}(\mathbb{P}^5)$ le diviseur exceptionnel, alors, comme $\mathbb{Z}$-modules, on a (cf. [GH78, Ch. 4,§6])

$$H^*(\mathbf{F}^1, \mathbb{Z}) \simeq H^*(G_\omega(2,7), \mathbb{Z}) \ \oplus \ H^*(E, \mathbb{Z})/H^*(\mathbb{P}^5, \mathbb{Z}).$$

L'anneau de cohomologie singulière $H^*(G_\omega(2,7), \mathbb{Z})$ est un $\mathbb{Z}$-module libre engendré par les classes des sous-variétés de Schubert de $G_\omega(2,7)$. Dans $G_\omega(2,7)$ il y a $\#\mathbf{I}^\omega_{2,7} = 18$ cellules de Schubert donc $H^*(G_\omega(2,7), \mathbb{Z})$ est de rang 18. En fait le polynôme de Poincaré de $G_\omega(2,7)$ est (cf. (2.10))

$$P(G_\omega(2,7), t) = 1 + t + 2t^2 + 2t^3 + 3t^4 + 3t^5 + 2t^6 + 2t^7 + t^8 + t^9.$$

Par ailleurs, puisque $p : E \to \mathbb{P}^5$ est une fibration en $\mathbb{P}^3$, l'anneau de cohomologie $H^*(E, \mathbb{Z})$ est un $H^*(\mathbb{P}^5, \mathbb{Z})$-module libre de rang 4 (cf. [GH78]). Comme $H^*(\mathbb{P}^5, \mathbb{Z})$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang 6, on obtient que $H^*(E, \mathbb{Z})/H^*(\mathbb{P}^5, \mathbb{Z})$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang 18 et donc que $H^*(\mathbf{F}^1, \mathbb{Z})$ est de rang 36.

De même, $\mathbf{F}^2$ est une fibration en $\mathbb{P}^3$ sur $G_\omega(4,7)$ donc $H^*(\mathbf{F}^2, \mathbb{Z})$ est un $H^*(G_\omega(4,7), \mathbb{Z})$-module libre de rang 4. Dans $G_\omega(4,7)$ il y a $\#\mathbf{I}^\omega_{4,7} = 8$ sous-variétés de Schubert donc $H^*(G_\omega(4,7), \mathbb{Z})$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang 8. En fait le polynôme de Poincaré de $G_\omega(4,7)$ est (cf. (2.10))

$$P(G_\omega(4,7), t) = 1 + t + t^2 + 2t^3 + t^4 + t^5 + t^6.$$

On en déduit que $H^*(\mathbf{F}^2, \mathbb{Z})$ est un $\mathbb{Z}$-module de rang 32 et donc que $\mathbf{F}^1$ et $\mathbf{F}^2$ ne sont pas isomorphes. ■

Ceci achève donc la démonstration de la proposition 2.3.26.

2.3.30. Revenons à présent aux automorphismes de la grassmannienne symplectique impaire $G_\omega(k, E)$. Un élément de $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}\Lambda^{\langle k\rangle}E, G_\omega(k, E))$, c'est-à-dire un automorphisme de l'espace projectif $\mathbb{P}\Lambda^{\langle k\rangle}E$ qui préserve $G_\omega(k, E)$, induit alors des automorphismes de chaque schéma de Fano de $G_\omega(k, E)$, en particulier de $\mathbf{F} = \mathbf{F}(2(n-k)+2, G_\omega(k, E))$. D'après la proposition 2.3.26, la variété projective $\mathbf{F}$ est soit irréductible et isomorphe à $\mathbf{F}^1$, soit elle a une deuxième composante irréductible $\mathbf{F}^2$ qui n'est pas isomorphe à $\mathbf{F}^1$; un automorphisme de $\mathbf{F}$ induit donc un automorphisme de $\mathbf{F}^1$. En particulier, un élément de $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}\Lambda^{\langle k\rangle}E, G_\omega(k, E))$ induit un automorphisme de $\mathbf{F}^1$; cela revient à dire, dans la terminologie du nº 2.3.24, qu'un automorphisme de $G_\omega(k, E)$ envoie un $\mathbb{P}^{2(n-k)+2}$ de la première espèce dans un $\mathbb{P}^{2(n-k)+2}$ de la première espèce.

Soit $p : \mathbf{F}^1 \to G_\omega(k-1, E)$ la projection, soit $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}\Lambda^{\langle k\rangle}E, G_\omega(k, E))$ et notons encore g l'automorphisme induit de $\mathbf{F}^1$. Alors on a la proposition suivante :

Proposition 2.3.31. *L'automorphisme g de $\mathbf{F}^1$ permute les fibres de p et induit un automorphisme $\tilde{g}$ de $G_\omega(k-1, E)$.*

Preuve. Soit $X_0 = \{V \in G_\omega(k-1, E) \mid e_0 \in V\}$ la Sp_{2n+1}-orbite fermée de $G_\omega(k-1, E)$ et $X_1 = G_\omega(k-1, E) \setminus X_0$ la Sp_{2n+1}-orbite ouverte. La projection p est un isomorphisme au-dessus de X_1 (cf. la proposition. 2.3.27) et les points de $p^{-1}(X_1)$ correspondent aux $\mathbb{P}^{2(n-k)+2}$ de la première espèce maximaux. Un automorphisme de $G_\omega(k, E)$ envoie un $\mathbb{P}^{2(n-k)+2}$ de la première espèce maximal sur un $\mathbb{P}^{2(n-k)+2}$ de la première espèce maximal, donc g envoie l'ouvert $p^{-1}(X_1)$ sur lui-même.

Soit à présent (V_1^{k-1}, H_1), (V_2^{k-1}, H_2) deux points de $p^{-1}(X_0) \subset \mathbf{F}^1$ et L_1, L_2 les $\mathbb{P}^{2(n-k)+2}$ correspondants, c'est-à-dire

$$L_1 = \{V \in G(k, E) \mid V_1^{k-1} \subset V \subset H_1\}$$
$$L_2 = \{V \in G(k, E) \mid V_2^{k-1} \subset V \subset H_2\}.$$

Si $p(V_1^{k-1}, H_1) = p(V_2^{k-1}, H_2)$, c'est-à-dire $V_1^{k-1} = V_2^{k-1} = V^{k-1}$, alors $H_1 \cap H_2$ est un espace de codimension 2 de $(V^{k-1})^\perp$ et L_1 et L_2 se coupent le long d'un $\mathbb{P}^{2(n-k)+1}$:

$$L_1 \cap L_2 = \{V \in G(k, E) \mid V^{k-1} \subset V \subset H_1 \cap H_2\} \simeq \mathbb{P}^{2(n-k)+1}.$$

Si $V_1^{k-1} \neq V_2^{k-1}$ alors l'intersection

$$L_1 \cap L_2 = \{V \in G(k, E) \mid V_1^{k-1} + V_2^{k-1} \subset V \subset H_1 \cap H_2\}$$

est soit vide, soit elle se réduit à un point : si $V \in L_1 \cap L_2$ alors nécessairement $V = V_1^{k-1} + V_2^{k-1}$ puisque V_1^{k-1} et V_2^{k-1} sont des hyperplans distincts dans V.

Par conséquent, l'image par g d'une fibre de p est encore une fibre de p. L'automorphisme g induit donc une bijection $\tilde{g}$ telle que le carré suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F}^1 & \xrightarrow{g} & \mathbf{F}^1 \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ G_\omega(k-1, E) & \xrightarrow{\tilde{g}} & G_\omega(k-1, E). \end{array} \tag{2.40}$$

Puisque $\mathbf{F}^1$ est une variété complexe compacte, la projection p est une surjection fermée et alors $\tilde{g}$ est continue pour la topologie transcendante. Par ailleurs, $\tilde{g}$ coïncide avec g sur l'ouvert X_1 si l'on identifie X_1 et $p^{-1}(X_1)$ via p, elle est donc holomorphe sur cet ouvert ; le complémentaire X_0 est de codimension complexe au moins 2, et donc, par le théorème de prolongement de Riemann il résulte que $\tilde{g}$ est holomorphe. Comme $G_\omega(k-1, E)$ est projective, $\tilde{g}$ est algébrique, ce qui conclut la preuve. ■

Un automorphisme g de $G_\omega(k, E)$ induit un automorphisme de $G_\omega(k-1, E)$ et donc, en itérant, un automorphisme de $G_\omega(1, E) = \mathbb{P}E$, c'est-à-dire un élément de $\mathrm{PSL}(E)$. Le lemme suivant montre que l'automorphisme de $G_\omega(k, E)$ induit par cet élément coïncide avec g.

Lemme 2.3.32. *Soit g un automorphisme de $G_\omega(k, E)$ et $\tilde{g}$ l'automorphisme qu'il induit sur $G_\omega(k-1, E)$. Si $\tilde{g}$ est induit par un élément $h \in \mathrm{PSL}(E)$ alors g est aussi induit par h.*

PREUVE. Commençons par remarquer que par tout point $V \in G_\omega(k, E)$ passe un $\mathbb{P}^{2(n-k)+2}$ de la première espèce contenu dans $G_\omega(k, E)$: il suffit, en effet, de choisir un $V^{k-1} \subset V$ et un H de dimension $2n - k + 2$ tel que $V \subset H \subset (V^{k-1})^\perp$ et alors

$$L = \{W \in G(k, E) \mid V^{k-1} \subset W \subset H\}$$

est un $\mathbb{P}^{2(n-k)+2}$ de la première espèce qui passe par V. Alors bien évidemment gL passe par gV et le carré commutatif (2.40) implique que pour tous $V \in G_\omega(k, E)$ et $V^{k-1} \in G(k-1, E)$ on a

$$V^{k-1} \subset V \Longrightarrow \tilde{g}V^{k-1} \subset gV.$$

Si $\tilde{g}$ est induit par $h \in \mathrm{PSL}(E)$ alors pour tout $V \in G_\omega(k, E)$ on a

$$V^{k-1} \subset V \Longrightarrow h(V^{k-1}) \subset gV,$$

et comme V est engendré par ses hyperplans, on obtient $gV = h(V)$. ∎

Pour achever la démonstration de l'isomorphisme $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}\Lambda^{\langle k \rangle}E, G_\omega(k, E)) \simeq \mathrm{PSp}(E)$ il suffit à présent de montrer qu'un élément de $\mathrm{PSL}(E)$ induit par un automorphisme de $G_\omega(2, E)$ est nécessairement dans $\mathrm{PSp}(E)$. D'après le lemme précédent, ceci est une conséquence du lemme qui suit :

Lemme 2.3.33. *Si l'automorphisme de $G(2, E)$ induit par un élément $g \in \mathrm{PSL}(E)$ préserve $G_\omega(2, E)$ alors $g \in \mathrm{PSp}(E)$.*

PREUVE. Soit $\hat{g}$ un représentant de g dans $\mathrm{SL}(E)$. La condition de l'hypothèse signifie que $\hat{g}$ préserve l'orthogonalité, c'est-à-dire

$$\forall u, v \in E \qquad u \perp v \Longrightarrow \hat{g}u \perp \hat{g}v,$$

puisqu'un 2-plan isotrope est engendré par deux vecteurs orthogonaux et, réciproquement, deux vecteurs orthogonaux non colinéaires engendrent un 2-plan isotrope.

Autrement dit, l'automorphisme $(u, v) \mapsto (\hat{g}u, \hat{g}v)$ préserve le fermé affine de $E \times E$

$$\{(u, v) \in E \times E \mid \omega(u, v) = 0\}.$$

Or $\omega = X_1Y_{2n} + \cdots + X_nY_{n+1} - X_{n+1}Y_n - \cdots - X_{2n}Y_1$ est un polynôme irréductible dans $\mathbb{C}[E \times E] = \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_{2n}, Y_0, \ldots, Y_{2n}]$, donc l'idéal de ce fermé est l'idéal engendré par ω dans $\mathbb{C}[E \times E]$. Ceci implique qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $\omega(\hat{g}u, \hat{g}v) = \lambda\omega(u, v)$ pour tous $u, v \in E$, autrement dit tel que $\hat{g}\omega = \lambda^{-1}\omega$. Si $\mu \in \mathbb{C}^*$ est une racine carrée de λ^{-1} alors $(\mu\hat{g})\omega = \omega$ c'est-à-dire $\mu\hat{g} \in \mathrm{Sp}_{2n+1}$ et donc $g \in \mathrm{PSp}(E)$. ∎

Chapitre 3

Variétés de drapeaux symplectiques impaires

3.1 Définition et premières propriétés

On se place dans le même cadre que dans les chapitres précédents, c'est-à-dire que l'on considère un espace vectoriel complexe E de dimension $2n+1$ et une forme antisymétrique de rang maximal $\omega \in \Lambda^2 E^*$. Le but de ce chapitre est d'introduire un analogue dans le cadre symplectique impair (c'est-à-dire pour E muni de ω) de la variété de drapeaux généralisée Sp_{2n}/B du groupe symplectique Sp_{2n} ($B \subset \mathrm{Sp}_{2n}$ est un sous-groupe de Borel).

Comme expliqué au n° A.1.7, Sp_{2n}/B s'identifie à la variété $\mathbb{F}_\omega(2n)$ des drapeaux maximaux de sous-espaces isotropes $V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n \subset \mathbb{C}^{2n}$. Le choix le plus naturel pour un objet analogue dans le cadre symplectique impair est le suivant :

Définition 3.1.1. On note $\mathbb{F}_\omega(E)$ la variété[1] des drapeaux maximaux de sous-espaces isotropes de E. Les variétés $\mathbb{F}_\omega(E)$ seront appelées *variétés de drapeaux symplectiques impaires.*

Remarque 3.1.2. Si E est $\mathbb{C}^{2n+1}$ avec sa base canonique $\{e_0, e_1, \ldots, e_{2n}\}$ – numérotée aussi $\{e_0, e_1, \ldots, e_n, e_{\bar{n}}, \ldots, e_{\bar{1}}\}$ comme au premier chapitre – et si ω est la forme symplectique impaire canonique

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (e_i^* \otimes e_{\bar{i}}^* - e_{\bar{i}}^* \otimes e_i^*) \tag{3.1}$$

alors on notera $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ au lieu de $\mathbb{F}_\omega(E)$. Plus généralement, quel que soit E de dimension $2n+1$ et $\omega \in \Lambda^2 E^*$ de rang maximal, le choix d'une base symplectique identifie (E, ω) à $\mathbb{C}^{2n+1}$ muni de la forme (3.1) et l'on notera $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ au lieu de $\mathbb{F}_\omega(E)$.

Fixons une base symplectique $\{e_0, e_1, \ldots, e_{2n}\} = \{e_0, e_1, \ldots, e_n, e_{\bar{n}}, \ldots, e_{\bar{1}}\}$ dans E. Un drapeau de sous-espaces isotropes maximal est un drapeau $V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_p \subset E = \mathbb{C}^{2n+1}$ qui ne peut pas être raffiné – c'est-à-dire où $\dim V_i = i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$ – et pour lequel il n'existe pas de sous-espace isotrope V_{p+1} qui contient proprement V_p. La donnée d'un drapeau maximal de sous-espaces isotropes est donc équivalente à la donnée d'un sous-espace isotrope maximal V_p et d'un drapeau complet de sous-espaces de V_p.

On a remarqué au n° 2.1.2 qu'un sous-espace isotrope de $\mathbb{C}^{2n+1}$ est de dimension au plus $n+1$, en particulier un sous-espace isotrope de dimension $n+1$ est maximal. Réciproquement,

[1] On va voir tout de suite d'où provient la structure de variété algébrique.

un sous-espace isotrope maximal est de dimension $n+1$: en effet, si V est un sous-espace isotrope maximal de E alors V contient e_0 et l'image $V/\mathbb{C}e_0$ par la projection sur $E/\mathbb{C}e_0 \simeq \langle e_1, \ldots, e_{2n}\rangle$ est un sous-espace isotrope maximal de $\langle e_1, \ldots, e_{2n}\rangle$. La variété de drapeaux symplectiques impaires est donc précisément la variété des drapeaux de la forme $V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n+1} \subset \mathbb{C}^{2n+1}$ avec V_i isotrope de dimension i pour tout $1 \leqslant i \leqslant n+1$.

Par définition, $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ est un sous-ensemble de la variété des drapeaux $V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n+1} \subset \mathbb{C}^{2n+1}$ où $\dim V_i = i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n+1$; conformément à une convention qu'on à déjà utilisée, on va désigner cette dernière par $\mathbb{F}(1, \ldots, n+1, \mathbb{C}^{2n+1})$.

Proposition 3.1.3. *$\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ est une sous-variété algébrique de $\mathbb{F}(1, \ldots, n+1, \mathbb{C}^{2n+1})$, lisse et de dimension $n(n+1)$; c'est une variété de Fano*[2] .

PREUVE. Comme pour la grassmannienne symplectique impaire, on va démontrer que $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ est donnée par l'annulation d'une section suffisamment générique d'un fibré vectoriel sur $\mathbb{F}(1, \ldots, n+1, \mathbb{C}^{2n+1})$ et la première partie du résultat s'ensuit alors par le théorème de Bertini. Plus précisément, considérons le fibré vectoriel $\Lambda^2 T_{n+1}^*$ où T_{n+1} désigne le $(n+1)$-ème fibré tautologique sur $\mathbb{F}(1, \ldots, n+1, \mathbb{C}^{2n+1})$; au-dessus d'un point $V_1 \subset \cdots \subset V_{n+1}$ de $\mathbb{F}(1, \ldots, n+1, \mathbb{C}^{2n+1})$ la fibre de T_{n+1} est V_{n+1} et la fibre de $\Lambda^2 T_{n+1}^*$ est $\Lambda^2 V_{n+1}^*$.

Une forme antisymétrique $\theta \in \Lambda^2(\mathbb{C}^{2n+1})^*$ définit une section globale de $\Lambda^2 T_{n+1}^*$ qui au point $V_1 \subset \cdots \subset V_{n+1}$ prend comme valeur la restriction $\theta|_{V_{n+1}} \in \Lambda^2 V_{n+1}^*$. Pour tout sous-espace $V_{n+1} \subset \mathbb{C}^{2n+1}$, toute forme antisymétrique $\eta \in \Lambda^2 V_{n+1}^*$ se prolonge en une forme définie partout $\tilde{\eta} \in \Lambda^2(\mathbb{C}^{2n+1})^*$, donc le fibré $\Lambda^2 T_{n+1}^*$ est engendré par ses sections globales qui proviennent de $\Lambda^2(\mathbb{C}^{2n+1})^*$.[3]

La forme ω est un élément générique de $\Lambda^2(\mathbb{C}^{2n+1})^*$ et le lieu d'annulation de la section de $\Lambda^2 T_{n+1}^*$ qu'elle définit est précisément l'ensemble des drapeaux $V_1 \subset \cdots \subset V_{n+1}$ avec V_{n+1} isotrope, c'est-à-dire $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$; on remarque que celui-ci est non vide : il contient par exemple le drapeau $\langle e_0\rangle \subset \langle e_0, e_1\rangle \subset \cdots \subset \langle e_0, \ldots, e_n\rangle$. Par le théorème de Bertini on obtient que $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ est une sous-variété lisse de codimension $n(n+1)/2$ de $\mathbb{F}(1, \ldots, n+1, \mathbb{C}^{2n+1})$.

La variété de drapeaux $\mathbb{F}(1, \ldots, n+1, \mathbb{C}^{2n+1})$ est isomorphe à une tour de fibrations en espaces projectifs, ce qui correspond d'une manière plus intuitive au fait que donner un drapeau $V_1 \subset \cdots \subset V_{n+1} \subset \mathbb{C}^{2n+1}$ équivaut à donner successivement une droite V_1 dans $\mathbb{C}^{2n+1}$, puis une droite V_2/V_1 dans $\mathbb{C}^{2n+1}/V_1$, et ainsi de suite. En particulier, $\mathbb{F}(1, \ldots, n+1, \mathbb{C}^{2n+1})$ est de dimension $2n + (2n-1) + \cdots + n = 3n(n+1)/2$ et il s'ensuit donc que $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ est de dimension $n(n+1)$.

Montrons maintenant que $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ est une variété de Fano. La différentielle de la section de $\Lambda^2 T_{n+1}^*$ définie par ω identifie le fibré normal de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ dans $\mathbb{F}(1, \ldots, n+1, \mathbb{C}^{2n+1})$ à la restriction $\Lambda^2 T_{n+1}^*|_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)}$. En particulier, si $T\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ et $T\mathbb{F}(1, \ldots, n+1, \mathbb{C}^{2n+1})$ désignent les fibrés tangents, alors

$$\det T\mathbb{F}_\omega(2n+1) = \det T\mathbb{F}(1, \ldots, n+1, \mathbb{C}^{2n+1})|_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)} \otimes \det(\Lambda^2 T_{n+1}^*|_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)})^{-1}.$$

La variété de drapeaux $\mathbb{F}(1, \ldots, n+1, \mathbb{C}^{2n+1})$ est homogène sous l'action du groupe $\mathrm{SL}(2n+1, \mathbb{C})$; notons $P \subset \mathrm{SL}(2n+1, \mathbb{C})$ le stabilisateur du point $V_\bullet^0 = (V_1^0 \subset \cdots \subset V_{n+1}^0) \in \mathbb{F}(1, \ldots, n+1, \mathbb{C}^{2n+1})$ où V_i^0 est le sous-espace engendré par les i derniers vecteurs de la

[2]C'est-à-dire que son fibré anticanonique $\det T\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ est ample.

[3]On peut montrer, à l'aide du théorème de Bott, que l'espace des sections globales de $\Lambda^2 T_{n+1}^*$ est en fait isomorphe à $\Lambda^2(\mathbb{C}^{2n+1})^*$. Un calcul plus général de ce type sera fait dans la section 4.2, on ne le reproduit donc pas ici.

base $\{e_0, \dots, e_{2n}\}$. On note L_λ le $\mathrm{SL}(2n+1, \mathbb{C})$-fibré en droites homogène dont la fibre au point base $V_\bullet^0$ est le P-module de dimension 1 de poids λ. Si l'on numérote $\alpha_0 = \varepsilon_0 - \varepsilon_1$, $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \dots, \alpha_{2n-1} = \varepsilon_{2n-1} - \varepsilon_{2n}$ les racines simples de $\mathrm{SL}(2n+1, \mathbb{C})$, alors P est le sous-groupe parabolique de $\mathrm{SL}(2n+1, \mathbb{C})$ qui contient le sous-groupe de Borel opposé B^- et dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$ contient les sous-espaces propres de $\mathfrak{sl}_{2n+1}$ qui correspondent aux racines simples $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-2}$. Un caractère λ de T se prolonge à P si et seulement si λ est orthogonal aux racines $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-2}$ c'est-à-dire si λ est combinaison linéaire des poids fondamentaux $\omega_{n-1}, \omega_n, \dots, \omega_{2n-1}$ (pour les notations cf. n° 2.3.3). Si L_λ est le $\mathrm{SL}(2n+1, \mathbb{C})$-fibré en droites sur $\mathbb{F}(1, \dots, n+1, \mathbb{C}^{2n+1})$ associé à un caractère $\lambda = a_{n-1}\omega_{n-1} + \dots + a_{2n-1}\omega_{2n-1}$, $a_{n-1}, \dots, a_{2n-1} \in \mathbb{Z}$, alors L_λ est ample si et seulement si les coefficients $a_{n-1}, \dots, a_{2n-1}$ sont tous strictement positifs.

Le fibré tangent de $\mathbb{F}(1, \dots, n+1, \mathbb{C}^{2n+1})$ est le $\mathrm{SL}(2n+1, \mathbb{C})$-fibré homogène dont la fibre au point base $V_\bullet^0$ est le P-module $\mathfrak{sl}_{2n+1}/\mathfrak{p}$. Le fibré en droites $\det T\mathbb{F}(1, \dots, n+1, \mathbb{C}^{2n+1})$ est donc le $\mathrm{SL}(2n+1, \mathbb{C})$-fibré associé au P-module de dimension 1

$$\det(\mathfrak{sl}_{2n+1}/\mathfrak{p}) = \Lambda^{3n(n+1)/2}(\mathfrak{sl}_{2n+1}/\mathfrak{p}) \; ;$$

soit λ le poids de ce module. Alors λ est la somme des racines de $\mathfrak{sl}_{2n+1}$ qui ne sont pas des racines de $\mathfrak{p}$; or $\mathfrak{p}$ contient toutes les racines négatives, et les racines positives de $\mathfrak{p}$ sont celles qui appartiennent au sous-système de racines engendré par $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-2}$. La somme des racines positives de $\mathfrak{sl}_{2n+1}$ est $2\rho = 2(\omega_0 + \dots + \omega_{2n-1})$, la somme des racines positives de $\mathfrak{p}$ est $2(\omega_0 + \dots + \omega_{n-2}) - (n-1)\omega_{n-1}$,[4] on en déduit donc que

$$\begin{aligned} \lambda &= 2(\omega_0 + \dots + \omega_{2n-1}) - 2(\omega_0 + \dots + \omega_{n-2}) + (n-1)\omega_{n-1} \\ &= (n+1)\omega_{n-1} + 2\omega_n + \dots + 2\omega_{2n-1}. \end{aligned}$$

D'autre part, la fibre au point base $V_\bullet^0$ du fibré en droites $\det \Lambda^2 T_{n+1}^*$ est le P-module de dimension un $\det \Lambda^2 (V_{n+1}^0)^* = \det \Lambda^2 \langle e_n, \dots, e_{2n} \rangle^*$; son poids est $-\varepsilon_{2n-1} - \varepsilon_{2n} = \omega_{2n-2}$. On a donc $\det \Lambda^2 T_{n+1}^* = L_{\omega_{2n-2}}$ et en conséquence

$$\begin{aligned} \det T\mathbb{F}(1, \dots, n+1, \mathbb{C}^{2n+1}) \otimes \det(\Lambda^2 T_{n+1}^*)^{-1} &= L_{(n+1)\omega_{n-1} + 2\omega_n + \dots + 2\omega_{2n-1}} \otimes L_{-\omega_{2n-2}} \\ &= L_{(n+1)\omega_{n-1} + 2\omega_n + \dots + 2\omega_{2n-3} + \omega_{2n-2} + 2\omega_{2n-1}} \end{aligned}$$

donc $\det T\mathbb{F}(1, \dots, n+1, \mathbb{C}^{2n+1}) \otimes \det(\Lambda^2 T_{n+1}^*)^{-1}$ est ample et par conséquent $\det T\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ aussi, ce qui montre que $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ est de Fano. ■

Remarque 3.1.4. Dans le cas symplectique, le plus souvent on voit la variété de drapeaux symplectiques $\mathbb{F}_\omega(2n)$ plongée dans la variété $\mathbb{F}(2n)$ des drapeaux complets de $\mathbb{C}^{2n}$ en complétant chaque drapeau isotrope maximal $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n \subset \mathbb{C}^{2n}$ en un drapeau complet

$$V_1 \subset \dots \subset V_{n-1} \subset V_n \subset V_{n-1}^\perp \subset \dots \subset V_1^\perp \subset \mathbb{C}^{2n}.$$

Dans le cadre symplectique impair ceci n'est plus possible, puisque dans $\mathbb{C}^{2n+1}$ un sous-espace V et son orthogonal $V^\perp$ ne sont pas toujours de dimensions complémentaires. Plus précisément, pour un drapeau de sous-espaces isotropes $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{n+1} \subset \mathbb{C}^{2n+1}$ on peut toujours considérer les orthogonaux $V_{n+1}^\perp \subset \dots \subset V_1^\perp$ mais dans la suite des n inclusions

[4] Donc si on calculait modulo $\varepsilon_0 + \dots + \varepsilon_{n-1} = \omega_{n-1}$ on aurait bien $2(\omega_0 + \dots + \omega_{n-2})$, la somme des racines positives d'un système de racines de type A_{n-1}.

$V_{n+1}^\perp \subset \cdots \subset V_1^\perp$ il y en a une qui est une égalité : en effet, il existe $1 \leqslant i \leqslant n$ tel que $e_0 \in V_{i+1}$ et $e_0 \notin V_i$, donc $V_{i+1} = V_i + \mathbb{C}e_0$ et alors $V_i^\perp = V_{i+1}^\perp$. Pour $j \neq i$, par la formule de dimension de 2.1.2 on a $\dim V_j^\perp = \dim V_{j+1}^\perp + 1$ donc $V_{n+1}^\perp \subset \cdots \subset V_{i+1}^\perp = V_i^\perp \subset \cdots \subset V_1^\perp$ et on obtient ainsi un drapeau complet dans $\mathbb{C}^{2n+1}$

$$V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n+1} = V_{n+1}^\perp \subset \cdots \subset V_{i+1}^\perp = V_i^\perp \subset \cdots \subset V_1^\perp \subset \mathbb{C}^{2n+1}. \tag{3.2}$$

Cependant l'application ensembliste $\mathbb{F}_\omega(2n+1) \to \mathbb{F}(2n+1)$ qui à un drapeau $V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n+1}$ associe le drapeau complet (3.2) n'est pas régulière, en fait elle n'est pas continue pour la topologie de Zariski ; cette application est régulière seulement sur chacune des strates $\{V_\bullet \mid e_0 \in V_{i+1} \setminus V_i\} \subset \mathbb{F}_\omega(2n+1)$, $0 \leqslant i \leqslant n$,[5] en particulier sur le complémentaire du fermé

$$\{(V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n+1}) \in \mathbb{F}_\omega(2n+1) \mid e_0 \in V_n\}$$

et définit ainsi une application rationnelle $\mathbb{F}_\omega(2n+1) \dashrightarrow \mathbb{F}(2n+1)$.

On se contente donc pour l'instant de voir $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ comme sous-variété de la variété de drapeaux $\mathbb{F}(1, \ldots, n+1, \mathbb{C}^{2n+1})$.

3.1.5. Le groupe symplectique impair Sp_{2n+1} agit naturellement dans $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$, son action étant la restriction de l'action de $\mathrm{GL}(2n+1, \mathbb{C})$ sur $\mathbb{F}(1, \ldots, n+1, \mathbb{C}^{2n+1})$. Comme dans le cas des grassmanniennes symplectiques impaires, l'action de Sp_{2n+1} sur $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ n'est pas transitive ; l'explication est la même : Sp_{2n+1} préserve le noyau $\mathbb{C}e_0$ de ω donc deux drapeaux qui n'ont pas la même incidence avec la droite $\mathbb{C}e_0$ ne peuvent pas se trouver dans la même Sp_{2n+1}-orbite. Comme c'était le cas pour les grassmanniennes symplectiques impaires, cette condition d'incidence suffit pour décrire les orbites de Sp_{2n+1} dans $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$; en outre, celles-ci ont des descriptions en tant que Sp_{2n}-variétés très similaires à celles des Sp_{2n+1}-orbites des grassmanniennes symplectiques impaires.

Proposition 3.1.6. *Le groupe* Sp_{2n+1} *agit dans* $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ *avec* $n+1$ *orbites :*

$$\mathcal{O}_i = \big\{(V_1 \subset \cdots \subset V_{n+1}) \in \mathbb{F}_\omega(2n+1) \mid e_0 \in V_i, e_0 \notin V_{i-1}\big\}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n+1.$$

Pour chaque $1 \leqslant i \leqslant n+1$*, l'orbite* $\mathcal{O}_i$ *est isomorphe à l'espace total du dual du* $(i-1)$*-ème fibré tautologique* T_{i-1}^* *sur la variété de drapeaux symplectiques* $\mathbb{F}_\omega(2n)$ *; de plus, cet isomorphisme est* Sp_{2n}*-équivariant.*

PREUVE. Notons, comme dans le chapitre précédent, F le sous-espace $\langle e_1, \ldots, e_{2n}\rangle$ et $p : E \to F$ la projection issue de la décomposition $E = \mathbb{C}e_0 \oplus F$; rappelons que le choix de cette décomposition distingue dans Sp_{2n+1} un sous-groupe fermé isomorphe à Sp_{2n} (cf. la formule (1.4)). Les ensembles $\mathcal{O}_i$ de l'énoncé sont évidemment stables sous l'action de Sp_{2n+1} ; montrons que ce sont des Sp_{2n+1}-orbites. Soit $V_\bullet = (V_1 \subset \cdots \subset V_{n+1})$ un point de $\mathcal{O}_i$. Par la définition de $\mathcal{O}_i$, pour $1 \leqslant j \leqslant i-1$ la projection p induit des isomorphismes $V_j \to p(V_j)$, pour $i \leqslant j \leqslant n+1$ on a $p(V_j) = V_j \cap F$ et $V_j = p(V_j) \oplus \mathbb{C}e_0$; de même, on a $V_i = V_{i-1} \oplus \mathbb{C}e_0$ et $p(V_{i-1}) = p(V_i)$. Par projection sur F, on associe donc à $V_\bullet$ un drapeau maximal de sous-espaces isotropes relativement à $\omega|_F$

$$p(V_\bullet) = \big(p(V_1) \subset \cdots \subset p(V_{i-1}) = p(V_i) \subset p(V_{i+1}) \subset \cdots \subset p(V_{n+1}) \subset F\big).$$

[5] Qui sont en fait les orbites de Sp_{2n+1} dans $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$, cf. la proposition 3.1.6 ci-dessous.

De cette manière on définit une application $p : \mathcal{O}_i \to \mathbb{F}_\omega(2n) = \mathbb{F}_{\omega|_F}(F)$ qu'on identifiera a posteriori à la projection associée à la structure de fibré vectoriel de $\mathcal{O}_i$ mentionnée dans l'énoncé. Mais avant d'arriver là et pour démontrer la transitivité de l'action de Sp_{2n+1} dans $\mathcal{O}_i$, il est utile d'expliciter le fermé de $\mathcal{O}_i$ isomorphe à $\mathbb{F}_\omega(2n)$, qui va être identifié à la section nulle de $\mathcal{O}_i$. Il s'agit du fermé

$$X_i = \left\{V_\bullet = (V_1 \subset \cdots \subset V_{n+1}) \in \mathbb{F}_\omega(2n+1) \middle| V_1, \ldots, V_{i-1} \subset F, e_0 \in V_i\right\} \subset \mathcal{O}_i.$$

La restriction $p|_{X_i} : X_i \to \mathbb{F}_\omega(2n)$ est en effet un isomorphisme Sp_{2n}-équivariant dont l'inverse envoie un drapeau

$$(W_1 \subset \cdots \subset W_{n+1}) \in \mathbb{F}_\omega(2n) = \mathbb{F}_{\omega|_F}(F)$$

sur le drapeau

$$(W_1 \subset \cdots \subset W_{i-1} \subset W_i \oplus \mathbb{C}e_0 \subset \cdots \subset W_{n+1} \oplus \mathbb{C}e_0) \in X_i.$$

L'image de $p(V_\bullet)$ par $(p|_{X_i})^{-1}$ est donc le drapeau

$$p(V_1) \subset \cdots \subset p(V_{i-1}) \subset V_i \subset V_{i+1} \subset \cdots \subset V_{n+1}. \tag{3.3}$$

Notons $\pi_i : \mathcal{O}_i \to X_i$ la composition $(p|_{X_i})^{-1} \circ p$ qui associe au drapeau $V_1 \subset \cdots \subset V_{n+1}$ le drapeau (3.3) ; l'application π_i sera a posteriori la rétraction de $\mathcal{O}_i$ sur sa section nulle.

De manière plus explicite, si $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$ est une base adaptée au drapeau $p(V_\bullet)$,[6] alors $\{v'_1, \ldots, v'_{i-1}, e_0, v'_i, \ldots, v'_n\}$ est une base adaptée au drapeau (3.3) et il existe $a_1, \ldots, a_{i-1} \in \mathbb{C}$ tels que

$$\{v'_1 + a_1 e_0, \ldots, v'_{i-1} + a_{i-1} e_0, e_0, v'_i, \ldots, v'_n\}$$

soit une base adaptée au drapeau $V_\bullet = (V_1 \subset \cdots \subset V_{n+1})$. Il s'ensuit que $V_\bullet$ et $\pi_i(V_\bullet)$ seront conjugués par tout élément du radical unipotent U de Sp_{2n+1} qui envoie

$$v'_1 \mapsto v'_1 + a_1 e_0, \ldots, v'_{i-1} \mapsto v'_{i-1} + a_{i-1} e_0,$$

et un tel élément existe puisque $v'_1, \ldots, v'_{i-1}$ sont indépendants. Réciproquement, on remarque que pour tout $g \in U$ on a $\pi_i(V_\bullet) = \pi_i(g \cdot V_\bullet)$, donc les orbites de U dans $\mathcal{O}_i$ coïncident avec les fibres de π_i. Comme le sous-groupe Sp_{2n} de Sp_{2n+1} agit transitivement dans X_i, on obtient comme voulu que $\mathcal{O}_i$ est une orbite de Sp_{2n+1}.

Quant à l'isomorphisme de $\mathcal{O}_i$ et du fibré T^*_{i-1}, on peut déjà en lire la démonstration entre les lignes du paragraphe précédent, mais pour rendre les choses plus claires on va le décrire de plus explicitement. Soit $W_\bullet = (W_1 \subset \cdots \subset W_n)$ un point de $\mathbb{F}_\omega(2n) = \mathbb{F}_\omega(F)$ et $\ell \in W^*_{i-1}$ un élément dans la fibre de T^*_{i-1} au point $W_\bullet$. À ℓ on associe le drapeau $V_\bullet = (V_1 \subset \cdots \subset V_{n+1})$ dans l'orbite $\mathcal{O}_i$ défini comme suit : V_{i-1} est le graphe de ℓ

$$\Gamma_\ell \subset W_{i-1} \oplus \mathbb{C} = W_{i-1} \oplus \mathbb{C}e_0 \subset F \oplus \mathbb{C}e_0 = E,$$

pour $1 \leqslant j \leqslant i-2$, V_j est le graphe $\Gamma_{\ell|_{W_j}} \subset \Gamma_\ell$ de la restriction $\ell|_{W_j}$, et pour $i \leqslant j \leqslant n+1$, $V_j = W_{j-1} \oplus \mathbb{C}e_0$. Autrement dit, si $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$ est une base adaptée au drapeau $W_\bullet$ alors $V_\bullet$ est le drapeau dont une base adaptée est

$$\{v'_1 + \ell(v'_1)e_0, \ldots, v'_{i-1} + \ell(v'_{i-1})e_0, e_0, v'_i, \ldots, v'_n\}.$$

Réciproquement, si $V_\bullet = (V_1 \subset \cdots \subset V_{n+1})$ est un point de l'orbite $\mathcal{O}_i$ alors V_{i-1} est le graphe d'une application linéaire $\ell : p(W_{i-1}) \to \mathbb{C}e_0 = \mathbb{C}$, c'est-à-dire un élément de la fibre de T^*_{i-1} au point $p(V_\bullet)$. ■

[6] C'est-à-dire si $p(V_\bullet) = (\langle v'_1 \rangle \subset \langle v'_1, v'_2 \rangle \subset \cdots \subset \langle v'_1, \ldots, v'_n \rangle)$.

Modulo l'identification de l'orbite $\mathcal{O}_i$ avec le dual T_{i-1}^* du $(i-1)$-ème fibré tautologique sur la variété de drapeaux symplectiques $\mathbb{F}_\omega(2n)$, l'action du radical unipotent $U \simeq F^*$ de Sp_{2n+1} dans $\mathcal{O}_i$ est décrite par

$$\forall f \in U \quad W_\bullet = (W_1 \subset \cdots \subset W_n) \in \mathbb{F}_\omega(2n) \quad \ell \in W_{i-1}^* : \qquad f \cdot \ell = f|_{W_{i-1}} + \ell,$$

et l'action sur $\mathcal{O}_i$ du sous-groupe $\mathbb{C}^*$ de Sp_{2n+1} est donnée par

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}^* \quad W_\bullet = (W_1 \subset \cdots \subset W_n) \in \mathbb{F}_\omega(2n) \quad \ell \in W_{i-1}^* : \qquad \lambda \cdot \ell = \lambda \ell.$$

Proposition 3.1.7. *Les adhérences des* Sp_{2n+1}*-orbites de* $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ *sont les fermés*

$$\overline{\mathcal{O}_i} = \left\{ (V_1 \subset \cdots \subset V_{n+1}) \in \mathbb{F}_\omega(2n+1) \mid e_0 \in V_i \right\}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n+1.$$

PREUVE. Soit $1 \leqslant i \leqslant n+1$, d'après la proposition 2.1.5 on veut démontrer que $\overline{\mathcal{O}_i} = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{O}_i$; il suffit donc de montrer que l'on a $\mathcal{O}_{i-1} \subset \overline{\mathcal{O}_i}$, et comme $\overline{\mathcal{O}_i}$ est Sp_{2n+1}-stable ceci revient à $\mathcal{O}_{i-1} \cap \overline{\mathcal{O}_i} \neq \emptyset$. Ceci sera en particulier une conséquence de la proposition 3.2.7 et de la remarque 3.2.11 ci-dessous mais une démonstration ad-hoc est la suivante.

On considère le drapeau $V_\bullet = (V_1 \subset \cdots \subset V_{n+1}) \in \mathcal{O}_{i-1}$ dont une base adaptée est $\{e_1, \ldots, e_{i-2}, e_0, e_{i-1}, \ldots, e_n\}$. On note, pour $t \in \mathbb{C}$, $V_\bullet(t)$ le drapeau dont une base adaptée est

$$\{e_1, \ldots, e_{i-2}, e_0 + te_{i-1}, e_{i-1}, \ldots, e_n\} ;$$

ceci définit donc une courbe algébrique dans $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$. Si $t \neq 0$, on a $e_0 \notin V_{i-1}(t) = \langle e_1, \ldots, e_{i-2}, e_0 + te_{i-1} \rangle$ et $e_0 \in V_i(t) = \langle e_0, e_1, \ldots, e_{i-1} \rangle$ donc $V_\bullet(t)$ est un point de $\mathcal{O}_i$. Par ailleurs, $V_\bullet(0) = V_\bullet$ donc $V_\bullet \in \overline{\mathcal{O}_i}$. ■

Remarque 3.1.8. D'après la proposition 3.1.6 il résulte que, pour $1 \leqslant i \leqslant n+1$, le fermé $\overline{\mathcal{O}_i}$ est de codimension $n+1-i$ dans $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$. En particulier, $\overline{\mathcal{O}_n} = \mathbb{F}_\omega(2n+1) \setminus \mathcal{O}_{n+1}$ est un diviseur irréductible.

3.2 Variétés de Schubert de la variété de drapeaux symplectiques impaire

Dans cette section on démontre que la variété de drapeaux symplectiques impaire $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ admet une décomposition cellulaire par des « cellules de Schubert » qui ont des caractérisations similaires à celles des cellules de Schubert de $\mathbb{F}_\omega(2n)$: on peut les décrire par des conditions d'incidence par rapport à un certain drapeau fixé, ce sont les orbites d'un sous-groupe de Borel de Sp_{2n+1}, ce sont également les cellules d'une décomposition de Białynicki-Birula associée à l'action d'un tore maximal de Sp_{2n+1}.

Comme pour les grassmanniennes symplectiques impaires, on pourrait procéder de façon directe, définissant les cellules en stratifiant $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ selon l'incidence d'un drapeau isotrope maximal $V_\bullet \in \mathbb{F}_\omega(2n+1)$ avec un drapeau fixé, mais il est beaucoup plus avantageux, et en fait indispensable pour la suite, de plonger $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ dans une variété de drapeaux symplectiques $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$ et de tirer parti de la décomposition cellulaire de cette dernière.

Proposition 3.2.1. *Il existe un plongement* $\mathbb{F}_\omega(2n+1) \hookrightarrow \mathbb{F}_\omega(2n+2)$ *qui identifie* $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ *à une sous-variété de Schubert de* $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$.

Preuve. Comme dans 1.1.11, on plonge $E = \mathbb{C}^{2n+1}$ dans $\tilde{E} = \mathbb{C}^{2n+2}$ et on prolonge la forme ω en une forme non dégénérée $\tilde{\omega} \in \Lambda^2(\tilde{E})^*$ en choisissant $e_{\bar{0}} \in \tilde{E}\backslash E$ et en décrétant que la base $\{e_0, \dots, e_n, e_{\bar{n}}, \dots, e_{\bar{0}}\}$ de $\tilde{E}$ est symplectique. La variété $\mathbb{F}_{\tilde{\omega}}(\tilde{E}) = \mathbb{F}_\omega(2n+2)$ est la variété des drapeaux $V_1 \subset \cdots \subset V_{n+1} \subset \tilde{E}$ de sous-espaces isotropes pour la forme $\tilde{\omega}$; un sous-espace $V \subset E$ est isotrope pour ω si et seulement si, en tant que sous-espace de $\tilde{E}$, il est isotrope pour $\tilde{\omega}$, donc la variété de drapeaux symplectiques impaires $\mathbb{F}_\omega(E) = \mathbb{F}_\omega(2n+1)$ s'identifie à la sous-variété

$$\{(V_1 \subset \cdots \subset V_{n+1}) \in \mathbb{F}_{\tilde{\omega}}(\tilde{E}) \mid V_{n+1} \subset E\}.$$

Celle-ci est une sous-variété de Schubert de $\mathbb{F}_{\tilde{\omega}}(\tilde{E}) = \mathbb{F}_\omega(2n+2)$: relativement au drapeau de référence $\langle e_0 \rangle \subset \langle e_0, e_1 \rangle \subset \cdots \subset \langle e_0, \dots, e_{\bar{1}} \rangle \subset \tilde{E}$ et avec la notation du n$^{\text{o}}$ A.2.6 c'est la variété de Schubert $X_{\bar{1}\bar{2}\dots\bar{n}0}$ associée à la permutation signée $\bar{1}\bar{2}\dots\bar{n}0 \in W(\mathrm{Sp}_{2n+2})$. ■

Remarque 3.2.2. Il est utile de noter que $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ est donnée dans $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$ par l'annulation d'une section générique d'un fibré vectoriel ; ceci va être essentiel dans la section 4.2. En effet, considérons sur $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$ le dual T^*_{n+1} du $(n+1)$-ème fibré tautologique T_{n+1} : au-dessus d'un point $V_\bullet = (V_1 \subset \cdots \subset V_{n+1})$ de $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$ la fibre de T_{n+1} est V_{n+1} et la fibre de T^*_{n+1} est V^*_{n+1}. Les formes linéaires sur $\mathbb{C}^{2n+2}$ définissent des sections globales de T^*_{n+1}, en associant à une forme linéaire $\ell \in (\mathbb{C}^{2n+2})^*$ la section qui au point $V_\bullet = (V_1 \subset \cdots \subset V_{n+1})$ prend comme valeur la restriction $\ell|_{V_{n+1}} \in T^*_{n+1}$; toute forme linéaire sur un sous-espace de dimension $n+1$ quelconque $V_{n+1} \subset \mathbb{C}^{2n+2}$ se prolonge en une forme linéaire définie sur $\mathbb{C}^{2n+2}$ tout entier, donc T^*_{n+1} est engendré par ses sections globales qui proviennent de $(\mathbb{C}^{2n+2})^*$. Si $\ell \in (\mathbb{C}^{2n+2})^*$ est une forme linéaire non nulle, le lieu des zéros de la section de T^*_{n+1} qu'elle définit est la sous-variété

$$\{(V_1 \subset \cdots \subset V_{n+1}) \in \mathbb{F}_\omega(2n+2) \mid V_{n+1} \subset H\} \tag{3.4}$$

où H est l'hyperplan $(l = 0) \subset \mathbb{C}^{2n+2}$. Or la restriction $\omega|_H$ est de rang maximal puisque son noyau $H \cap H^\perp = H^\perp$ est de dimension 1, donc la variété (3.4) est isomorphe à la variété de drapeaux symplectiques impaires $\mathbb{F}_{\omega|_H}(H) = \mathbb{F}_\omega(2n+1)$.

Ayant fixé l'inclusion $E = \mathbb{C}^{2n+1} \subset \tilde{E} = \mathbb{C}^{2n+2}$, remarquons que la sous-variété de Schubert $\{(V_1 \subset \cdots \subset V_{n+1}) \in \mathbb{F}_{\tilde{\omega}}(\tilde{E}) \mid V_{n+1} \subset E\}$ de $\mathbb{F}_{\tilde{\omega}}(\tilde{E})$ à laquelle on identifie $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ dans la preuve de la proposition 3.2.1 ne dépend pas du choix du prolongement $\tilde{\omega}$ de ω : ceci est en effet clair puisque le sous-espace $E \subset \tilde{E}$ et la restriction $\tilde{\omega}|_E$ sont fixés. On peut en dire même plus : par le choix de la base symplectique $\{e_0, e_1, \dots, e_{2n}\}$ de E on distingue dans $\tilde{E}$ le drapeau $\langle e_0 \rangle \subset \langle e_0, e_1 \rangle \subset \cdots \subset \langle e_0, \dots, e_{2n} \rangle \subset \tilde{E}$ par rapport auquel $\mathbb{F}_{\tilde{\omega}}(\tilde{E})$ obtient une structure de complexe cellulaire ; la sous-variété de Schubert $X_{\bar{1}\bar{2}\dots\bar{n}0} = \{(V_1 \subset \cdots \subset V_{n+1}) \in \mathbb{F}_{\tilde{\omega}}(\tilde{E}) \mid V_{n+1} \subset E\} \subset \mathbb{F}_{\tilde{\omega}}(\tilde{E})$ en est un sous-complexe et on affirme que la décomposition cellulaire de $X_{\bar{1}\bar{2}\dots\bar{n}0}$ ne dépend pas du choix de $\tilde{\omega}$.[7] En effet, les cellules de Schubert de $\mathbb{F}_{\tilde{\omega}}(\tilde{E})$ sont définies par des conditions d'incidence par rapport au drapeau $\langle e_0 \rangle \subset \langle e_0, e_1 \rangle \subset \cdots \subset \langle e_0, \dots, e_{2n} \rangle \subset \tilde{E}$ qui ne dépend pas du choix de $\tilde{\omega}$; le fermé $X_{\bar{1}\bar{2}\dots\bar{n}0} \subset \mathbb{F}_{\tilde{\omega}}(\tilde{E})$ n'en dépend pas non plus, donc il en est de même pour ses cellules de Schubert.

On peut donc introduire la définition suivante :

Définition 3.2.3. Modulo l'identification $\mathbb{F}_\omega(2n+1) = X_{\bar{1}\bar{2}\dots\bar{n}0} \subset \mathbb{F}_\omega(2n+2)$ donnée par un plongement $\mathbb{F}_\omega(2n+1) \subset \mathbb{F}_\omega(2n+2)$ comme dans la proposition 3.2.1, les *cellules de Schubert*

[7] Alors que évidemment $\mathbb{F}_{\tilde{\omega}}(\tilde{E})$ et donc sa décomposition en dépendent !

de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ définies par rapport au drapeau $\langle e_0\rangle \subset \langle e_0, e_1\rangle \subset \cdots \subset \langle e_0, \ldots, e_{2n}\rangle$ sont les cellules de Schubert de $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$ définies par rapport au drapeau $\langle e_0\rangle \subset \langle e_0, e_1\rangle \subset \cdots \subset \langle e_0, \ldots, e_{2n}\rangle \subset \mathbb{C}^{2n+2}$ qui sont contenues dans la sous-variété $X_{\bar{1}\bar{2}\ldots\bar{n}0}$.

On va fixer désormais un plongement $\mathbb{F}_\omega(2n+1) \subset \mathbb{F}_\omega(2n+2)$ et une identification $\mathbb{F}_\omega(2n+1) = X_{\bar{1}\bar{2}\ldots\bar{n}0}$. Les cellules de Schubert de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ correspondant au drapeau $\langle e_0\rangle \subset \langle e_0, e_1\rangle \subset \cdots \subset \langle e_0, \ldots, e_{2n}\rangle$ sont donc en bijection avec le sous-ensemble

$$\{w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+2}) \mid w \leqslant \bar{1}\bar{2}\ldots\bar{n}0\}$$

du groupe de Weyl $W(\mathrm{Sp}_{2n+2})$ de Sp_{2n+2}.

Notation 3.2.4. On désigne l'ensemble $\{w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+2}) \mid w \leqslant \bar{1}\bar{2}\ldots\bar{n}0\}$ par $W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$.

Remarque 3.2.5. $W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ n'est pas un groupe ! D'autant plus, ce n'est pas le groupe de Weyl du groupe symplectique impair Sp_{2n+1}.[8] La notation suggère seulement que, tout comme $W(\mathrm{Sp}_{2n})$ dans le cas de la variété $\mathbb{F}_\omega(2n)$, l'ensemble $W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ paramètre les cellules de la variété de drapeaux $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$.

Proposition 3.2.6. *$W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ s'identifie à l'ensemble des permutations signées des lettres $\{0, 1, \ldots, n\}$ qui dans la notation « en ligne » ne contiennent pas $\bar{0}$, c'est-à-dire*

$$W(\mathrm{Sp}_{2n+1}) = \big\{w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+2}) \mid \bar{0} \notin \{w(0), w(1), \ldots, w(n)\}\big\}.$$

PREUVE. On peut utiliser le critère de Proctor (A.4) mais il est plus parlant d'interpréter l'énoncé géométriquement. Soit $V_\bullet = (V_1 \subset \cdots \subset V_{n+1})$ un point de $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$ et soit $C_w \subset \mathbb{F}_\omega(2n+2)$ la cellule de Schubert définie par rapport au drapeau $\langle e_0\rangle \subset \langle e_0, e_1\rangle \subset \cdots \subset \langle e_0, \ldots, e_{2n}\rangle$ qui contient $V_\bullet$. Alors, comme expliqué au n° A.2.7, $V_\bullet$ possède une base adaptée $\{v_0, \ldots, v_n\}$ où $v_0, \ldots, v_n$ sont les lignes d'une matrice (a_{ij}) de taille $(n+1) \times (2n+2)$ telle que le coefficient $a_{iw(i)}$ situé sur la ligne i et la colonne $w(i)$ est non nul et tous les coefficients situés à sa droite sont nuls, c'est-à-dire $a_{ij} = 0$ si $w(i) < j$.

Il est clair que $V_{n+1} \subset \mathbb{C}^{2n+1}$ si et seulement si les coefficients a_{i2n+1} situés sur la dernière colonne de la matrice (a_{ij}) sont nuls. Par la propriété définissant la matrice (a_{ij}) ceci équivaut à $w(i) < 2n+1$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$. On obtient ainsi que les cellules de Schubert contenues dans $X_{\bar{1}\bar{2}\ldots\bar{n}0}$ sont précisément les C_w avec $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+2})$ tel que $w(i) < 2n+1$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$. ∎

On munit l'ensemble $W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ de l'ordre induit par l'ordre de Bruhat du groupe de Weyl $W(\mathrm{Sp}_{2n+2})$; on note $w_0 = \bar{1}\bar{2}\ldots\bar{n}0$ son plus grand élément. On a bien évidemment :

Proposition 3.2.7. *Si $w, w' \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ alors $C_w \subset \overline{C_{w'}}$ si et seulement si $w \leqslant w'$.*

On a déjà remarqué dans la démonstration de la proposition 3.2.6 qu'un drapeau $V_\bullet = (V_1 \subset \cdots \subset V_{n+1})$ avec $V_{n+1} \subset \mathbb{C}^{2n+1}$ est donné par une matrice (a_{ij}) de taille $(n+1)\times(2n+2)$ dont la dernière colonne est nulle ; en enlevant cette colonne on est conduit à la proposition suivante :

[8] Le groupe de Weyl de Sp_{2n+1} est isomorphe au groupe de Weyl $W(\mathrm{Sp}_{2n})$ du groupe symplectique Sp_{2n} (cf. la proposition 1.1.9).

Proposition 3.2.8. *Si $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$, un drapeau $V_\bullet = (V_1 \subset \cdots \subset V_{n+1}) \in \mathbb{F}_\omega(2n+1)$ appartient à la cellule de Schubert C_w définie par rapport au drapeau $\langle e_0\rangle \subset \langle e_0, e_1\rangle \subset \cdots \subset \langle e_0, \ldots, e_{2n}\rangle$ si et seulement s'il admet une base adaptée $\{v_0, \ldots, v_n\}$ constituée de vecteurs de la forme*

$$v_i = \sum_{j \leqslant w(i)} a_{ij} e_j, \quad 0 \leqslant i \leqslant n,\, a_{ij} \in \mathbb{C},\, a_{iw(i)} \neq 0$$

c'est-à-dire qui sont les lignes d'une matrice (a_{ij}) de taille $(n+1) \times (2n+1)$ telle que le coefficient $a_{iw(i)}$ situé sur la ligne i et la colonne $w(i)$ est non nul et tous les coefficients situés à sa droite sont nuls, c'est-à-dire $a_{ij} = 0$ si $w(i) < j$.

Une matrice comme dans la proposition précédente, que l'on associe à un drapeau $V_\bullet = (V_1 \subset \cdots \subset V_{n+1})$ appartenant à la cellule C_w, sera uniquement déterminée si on lui impose les conditions supplémentaires $a_{iw(i)} = 1$, $0 \leqslant i \leqslant n$, respectivement $a_{ij} = 0$ si $i > w^{-1}(j)$. En d'autres termes, un drapeau $V_\bullet \in C_w$ est donné par une unique matrice (a_{ij}) de taille $(n+1) \times (2n+1)$ telle que pour chaque ligne $0 \leqslant i \leqslant n$ le coefficient $a_{iw(i)}$ est égal à 1 et tous les coefficients situés à droite ou en dessous sont nuls. La condition que $V_\bullet$ soit un drapeau isotrope fait que parmi les autres coefficients ceux qui sont opposés[9] à une position où il y a un 1 dans une ligne supérieure – c'est-à-dire les coefficients situés sur la colonne $\overline{w(i)}$ en dessous de la ligne i – sont déterminés. Tous les autres coefficients sont libres et établissent une carte affine sur C_w ; en marquant par $*$ les coefficients libres et par $\bullet$ les coefficients déterminés, une telle matrice est de la forme :

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & \bullet & * & * & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bullet & * & * & 0 & \bullet & * & 1 & 0 \\ 0 & \bullet & \bullet & * & 0 & \bullet & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

cet exemple étant la matrice qui décrit la cellule de Schubert de la variété de drapeaux symplectiques impaires $\mathbb{F}_\omega(9)$ associée à la permutation signée $4\bar{1}0\bar{2}\bar{3}$.

Sur ces matrices on peut lire la caractérisation des cellules C_w de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ par des conditions d'incidence relativement au drapeau de référence $\langle e_0\rangle \subset \langle e_0, e_1\rangle \subset \cdots \subset \langle e_0, \ldots, e_{2n}\rangle$. Dans le cas des cellules de Schubert de $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$ définies par rapport au drapeau $\langle e_0\rangle \subset \langle e_0, e_1\rangle \subset \cdots \subset \langle e_0, \ldots, e_{2n}\rangle \subset \mathbb{C}^{2n+2}$, la caractérisation par des condition d'incidence fait intervenir la fonction de rang r_w d'une permutation signée $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+2})$ qui associe à une paire (i,j), $0 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant j \leqslant 2n+1$ l'entier

$$r_w(i,j) = \mathrm{card}\{k \mid k \leqslant i, w(k) \leqslant j\}.$$

Si $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1}) \subset W(\mathrm{Sp}_{2n+2})$ alors par la proposition 3.2.6 la fonction de rang r_w de w est déterminée par sa restriction au rectangle $\{0, \ldots, n\} \times \{0, \ldots, 2n\}$. On obtient alors la proposition suivante :

Proposition 3.2.9. *Si $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$, la cellule de Schubert C_w de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ définie par rapport au drapeau $\langle e_0\rangle \subset \langle e_0, e_1\rangle \subset \cdots \subset \langle e_0, \ldots, e_{2n}\rangle$ est l'ensemble des drapeaux $V_\bullet = (V_1 \subset \cdots \subset V_{n+1})$ de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ qui vérifient*

$$\dim(V_{i+1} \cap \langle e_0, \ldots, e_j\rangle) = r_w(i,j), \quad 0 \leqslant i \leqslant n,\, 0 \leqslant j \leqslant 2n.$$

[9] Cf. le n° 2.2.8.

Proposition 3.2.10. *Les cellules de Schubert de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ définies par rapport au drapeau $\langle e_0\rangle \subset \langle e_0, e_1\rangle \subset \cdots \subset \langle e_0, \dots, e_{2n}\rangle$ sont les orbites du sous-groupe de Borel B de Sp_{2n+1} qui préserve ce drapeau.*

PREUVE. Les cellules de Schubert de $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$ définies en prenant comme drapeau de référence le drapeau $\langle e_0\rangle \subset \langle e_0, e_1\rangle \subset \cdots \subset \langle e_0, \dots, e_{2n}\rangle \subset \mathbb{C}^{2n+2}$ sont les orbites dans $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$ du sous-groupe de Borel $\tilde{B}$ de Sp_{2n+2} qui préserve ce drapeau. L'action de $\tilde{B}$ sur $X_{\bar{1}\bar{2}\dots\bar{n}0}$ se fait à travers le morphisme de restriction $b \mapsto b|_{\mathbb{C}^{2n+1}}$ dont l'image est précisément le sous-groupe de Borel B de Sp_{2n+1} qui préserve le drapeau $\langle e_0\rangle \subset \langle e_0, e_1\rangle \subset \cdots \subset \langle e_0, \dots, e_{2n}\rangle$ (cf. la proposition 1.1.12). Ceci prouve la proposition. ■

Remarque 3.2.11. Il est ainsi évident que les Sp_{2n+1}-orbites de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ sont des réunions de cellules de Schubert. En fait, il résulte de la description des Sp_{2n+1}-orbites donnée par la proposition 3.1.6 et de la caractérisation des cellules de Schubert en termes de matrices donnée par la proposition 3.2.8 qu'une cellule de Schubert C_w est contenue dans la Sp_{2n+1}-orbite $\mathcal{O}_i$ si et seulement si $w(i-1) = 0$, autrement dit

$$\mathcal{O}_i = \bigsqcup_w C_w$$

où la réunion se fait selon les w qui en notation en ligne ont la lettre 0 sur la i-ème position.

Proposition 3.2.12. *Les cellules de Schubert de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ définies par rapport au drapeau $\langle e_0\rangle \subset \langle e_0, e_1\rangle \subset \cdots \subset \langle e_0, \dots, e_{2n}\rangle$ sont les cellules d'une décomposition de Białynicki-Birula associée à l'action du tore maximal T de Sp_{2n+1} formé par les matrices de Sp_{2n+1} qui sont diagonales dans la base $\{e_0, \dots, e_{2n}\}$. En particulier, il y a une correspondance bijective entre $W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ et les points fixes de T dans $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$; le T-point fixe associé à $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ est le drapeau $V_\bullet^w$ dont une base adaptée est $\{e_{w(0)}, e_{w(1)}, \dots, e_{w(n)}\}$.*

PREUVE. Soit $\tilde{T}$ le tore maximal du groupe symplectique Sp_{2n+2} formé par les éléments qui agissent diagonalement dans la base $\{e_0, \dots, e_{2n+1}\}$. L'action de $\tilde{T}$ sur $X_{\bar{1}\bar{2}\dots\bar{n}0}$ se fait à travers le morphisme de restriction $t \mapsto t|_{\mathbb{C}^{2n+1}}$ qui réalise un isomorphisme de $\tilde{T}$ sur T. Le résultat découle alors de l'énoncé analogue pour la variété de drapeaux symplectiques, cf. n° A.2.9. ■

Définition 3.2.13. Les *sous-variétés de Schubert* de la variété de drapeaux symplectiques impaires $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ définies par rapport au drapeau $\langle e_0\rangle \subset \langle e_0, e_1\rangle \subset \cdots \subset \langle e_0, \dots, e_{2n}\rangle$ sont par définition les adhérences des cellules de Schubert définies par rapport au même drapeau. On note X_w la sous-variété de Schubert de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ qui est l'adhérence de la cellule C_w, $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$.

Modulo l'identification de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ avec $X_{\bar{1}\bar{2}\dots\bar{n}0} \subset \mathbb{F}_\omega(2n+2)$, les sous-variétés de Schubert de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ sont tout simplement les sous-variétés de Schubert de $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$ qui sont contenues dans $X_{\bar{1}\bar{2}\dots\bar{n}0}$. On obtient donc aussitôt, à partir de la caractérisation des variétés de Schubert de $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$ par des conditions d'incidence, le résultat analogue pour $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$.

Proposition 3.2.14. *Si $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$, la variété de Schubert $X_w \subset \mathbb{F}_\omega(2n+1)$ définie relativement au drapeau $\langle e_0\rangle \subset \langle e_0, e_1\rangle \subset \cdots \subset \langle e_0, \dots, e_{2n}\rangle$ est l'ensemble des drapeaux $V_\bullet = (V_1 \subset \cdots \subset V_{n+1}) \in \mathbb{F}_\omega(2n+1)$ qui vérifient*

$$\dim(V_{i+1} \cap \langle e_0, \dots, e_j\rangle) \geqslant r_w(i,j), \quad 0 \leqslant i \leqslant n,\ 0 \leqslant j \leqslant 2n.$$

Autrement dit, un drapeau $V_\bullet = (V_1 \subset \cdots \subset V_{n+1})$ appartient à la cellule X_w si et seulement s'il admet une base adaptée $\{v_0, \ldots, v_n\}$ formée par des vecteurs qui sont de la forme

$$v_i = \sum_{j \leqslant w(i)} a_{ij} e_j, \quad 0 \leqslant i \leqslant n,\ a_{ij} \in \mathbb{C},$$

c'est-à-dire qui – relativement à la base $\{e_0, \ldots, e_{2n}\}$ – sont les lignes d'une matrice (a_{ij}) de taille $(n+1) \times (2n+1)$ dont les coefficients situés sur chaque ligne i strictement à droite de la colonne $w(i)$ sont nulles, c'est-à-dire $a_{ij} = 0$ si $j > w(i)$.

Par exemple, la matrice

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

décrit la sous-variété de Schubert de la variété de drapeaux symplectiques impaires $\mathbb{F}(9)$ associée à la permutation signée $4\bar{1}0\bar{2}\bar{3}$ (qui est l'adhérence de la cellule de Schubert $C_{4\bar{1}0\bar{2}\bar{3}}$ décrite par la matrice (3.5) ci-dessus).

3.2.1 Le polynôme de Poincaré de la variété de drapeaux $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$

Dans cette section on calcule le polynôme de Poincaré

$$P(\mathbb{F}_\omega(2n+1), t) = \sum_{i=0}^{n(n+1)} \operatorname{rang} H^{2i}(\mathbb{F}_\omega(2n+1), \mathbb{Z}) t^i$$

de la variété de drapeaux symplectiques impaire $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$. Le calcul de ce polynôme nous fournit donc les nombres de Betti de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ et, en vertu du fait que le groupe de cohomologie singulière $H^{2i}(\mathbb{F}_\omega(2n+1), \mathbb{Z})$ est un $\mathbb{Z}$-module libre engendré par les classes des sous-variétés de Schubert de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ de codimension i, il nous explique également comment sont distribués selon la longueur les éléments de $W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$.

On a deux méthodes de calcul. La première est basée sur le même principe que celle qu'on a utilisé plus tôt dans le cas de la grassmannienne symplectique impaire (cf. la proposition 2.2.17), à savoir on fait le lien entre les valeurs du polynôme de Poincaré de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ et le nombre de points de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ sur un corps fini. La deuxième méthode exploite directement la description de $W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ comme sous-ensemble de $W(\mathrm{Sp}_{2n+2})$ (cf. la proposition 3.2.6) et elle nous renseigne plus explicitement sur la distribution des éléments de $W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ parmi les éléments de $W(\mathrm{Sp}_{2n+2})$.

3.2.15. Voici la première méthode. On remarque que la variété algébrique $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$, tout comme la grassmannienne symplectique impaire $G_\omega(k, 2n+1)$ et comme les grassmanniennes et variétés de drapeaux symplectiques, admet un modèle sur $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire que c'est l'ensemble des points $\mathbb{C}$-rationnels du complexifié d'un schéma de type fini. En effet, la variété de drapeaux $\mathbb{F}(1, \ldots, n+1, \mathbb{C}^{2n+1})$ est un fermé donné par des équations à coefficients entiers dans le produit d'espaces projectifs[10] $\mathbb{P}\mathbb{C}^{2n+1} \times \mathbb{P}\Lambda^2\mathbb{C}^{2n+1} \times \cdots \times \mathbb{P}\Lambda^{n+1}\mathbb{C}^{2n+1}$ – donc via le plongement de

[10] Les coefficients étant calculés dans des bases des puissances extérieures $\Lambda^k\mathbb{C}^{2n+1}$ induites par une base quelconque de $\mathbb{C}^{2n+1}$.

Segre dans un espace projectif $\mathbb{P}^N$; si $V_{n+1} \subset \mathbb{C}^{2n+1}$ est un sous-espace de dimension $n+1$ alors la condition « V_{n+1} isotrope » s'exprime par des équations à coefficients entiers dans une base symplectique de $\mathbb{C}^{2n+1}$ (cf. la démonstration de la proposition 2.2.17), il s'ensuit donc que $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ – qui est l'ensemble des drapeaux $(V_1 \subset \dots V_{n+1}) \in \mathbb{F}(1,\dots,n+1,\mathbb{C}^{2n+1})$ avec V_{n+1} isotrope – est un fermé dans l'espace projectif $\mathbb{P}^N$ donné par des équations à coefficients entiers. Si l'on désigne par $T_0,\dots,T_N$ les coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}^N$ et par $P_1,\dots,P_M$ ces équations, alors $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ est l'ensemble des points $\mathbb{C}$-rationnels du schéma $\operatorname{Proj}\mathbb{C}[T_0,\dots,T_N]/(P_1,\dots,P_M)$ qui est le complexifié du schéma de type fini $\mathsf{F}_\omega(k,2n+1) = \operatorname{Proj}\mathbb{Z}[T_0,\dots,T_N]/(P_1,\dots,P_M)$.

Par ces mêmes arguments, si $q=p^m$ est une puissance d'un nombre premier p et $\mathbb{F}_q$ le corps à q éléments, alors l'ensemble des points $\mathbb{F}_q$-rationnels du schéma

$$\mathsf{F}_\omega(k,2n+1) \times \operatorname{Spec}\mathbb{F}_q = \operatorname{Proj}\mathbb{F}_q[T_0,\dots,T_N]/(P_1,\dots,P_M)$$

s'identifie à l'ensemble des drapeaux de $\mathbb{F}_q^{2n+1}$ isotropes pour la forme canonique sur $\mathbb{F}_q^{2n+1}$

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (e_i^* \otimes e_{\bar{\imath}}^* - e_{\bar{\imath}}^* \otimes e_i^*),$$

en d'autres termes c'est la $\mathbb{F}_q$-variété de drapeaux symplectiques impaire $\mathbb{F}_\omega(\mathbb{F}_q^{2n+1})$.

Proposition 3.2.16. *Si $q=p^m$ est une puissance d'un nombre premier p et $\mathbb{F}_q$ le corps à q éléments, alors $P(\mathbb{F}_\omega(2n+1),q)$ est égal au nombre de $\mathbb{F}_q$-points de $\mathbb{F}_\omega(\mathbb{F}_q^{2n+1})$.*

PREUVE. On remarque que $\mathbb{F}_\omega(\mathbb{F}_q^{2n+1})$ admet une « décomposition cellulaire »

$$\mathbb{F}_\omega(\mathbb{F}_q^{2n+1}) = \bigsqcup_{w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})} C_w(\mathbb{F}_q)$$

dont les cellules sont isomorphes à des $\mathbb{F}_q$-espaces affines : $C_w \simeq \mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^{\ell(w)}$ pour tout $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$. En effet ceci découle du fait que la proposition 3.2.8 qui décrit les cellules de Schubert de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ en termes de matrices, reste vraie pour $\mathbb{F}_\omega(\mathbb{F}_q^{2n+1})$. On a alors

$$|\mathbb{F}_\omega(\mathbb{F}_q^{2n+1})| = \sum_{w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})} q^{\ell(w)} = P(\mathbb{F}_\omega(2n+1),q)$$

la deuxième égalité étant une conséquence du fait que le $2i$-ème nombre de Betti de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ est le cardinal de l'ensemble $\{w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1}) \mid \ell(w)=i\}$. ■

Pour compter le nombre de points de $\mathbb{F}_\omega(\mathbb{F}_q^{2n+1})$, on procède comme pour la grassmannienne symplectique impaire, à savoir on compte séparément les points de chaque $\mathrm{Sp}_{2n+1}(\mathbb{F}_q)$-orbite de $\mathbb{F}_\omega(\mathbb{F}_q^{2n+1})$. On remarque à cet effet que la proposition 3.1.6 qui décrit les Sp_{2n+1}-orbites de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ est encore vraie pour $\mathbb{F}_\omega(\mathbb{F}_q^{2n+1})$; plus précisément, le groupe $\mathrm{Sp}_{2n+1}(\mathbb{F}_q)$ agit sur $\mathbb{F}_\omega(\mathbb{F}_q^{2n+1})$ avec $n+1$ orbites $\mathcal{O}_1(\mathbb{F}_q), \mathcal{O}_2(\mathbb{F}_q), \dots, \mathcal{O}_{n+1}(\mathbb{F}_q)$, et pour chaque $1 \leqslant i \leqslant n+1$, l'orbite $\mathcal{O}_i(\mathbb{F}_q)$ est $\mathbb{F}_q$-isomorphe au dual du $(i-1)$-ème fibré tautologique T_{i-1}^* sur la variété de drapeaux symplectiques impaire $\mathbb{F}_\omega(\mathbb{F}_q^{2n})$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} |\mathbb{F}_\omega(\mathbb{F}_q^{2n+1})| &= |\mathcal{O}_1(\mathbb{F}_q)| + |\mathcal{O}_2(\mathbb{F}_q)| + \dots + |\mathcal{O}_{n+1}(\mathbb{F}_q)| \\ &= |\mathbb{F}_\omega(\mathbb{F}_q^{2n})| + q|\mathbb{F}_\omega(\mathbb{F}_q^{2n})| + \dots + q^n|\mathbb{F}_\omega(\mathbb{F}_q^{2n})|. \end{aligned} \tag{3.6}$$

On s'est ramené de cette manière au calcul du nombre de points de la $\mathbb{F}_q$-variété de drapeaux symplectiques $\mathbb{F}_\omega(\mathbb{F}_q^{2n})$. Ce nombre est le quotient du nombre des familles $\{v_1, \dots, v_n\}$ de vecteurs de $\mathbb{F}_q^{2n}$ qui sont des bases adaptées de drapeaux isotropes par le nombre de bases adaptées d'un drapeau isotrope fixé.

Pour une famille $\{v_1, \dots, v_n\}$ le drapeau $\langle v_1\rangle \subset \langle v_1, v_2\rangle \subset \cdots \subset \langle v_1, \dots, v_n\rangle$ est isotrope si et seulement si

$$\begin{aligned}
&v_1 \in \mathbb{F}_q^{2n} \setminus \{0\}\\
&v_2 \in \langle v_1\rangle^\perp \setminus \langle v_1\rangle\\
&\dots\\
&v_n \in \langle v_1, \dots, v_{n-1}\rangle^\perp \setminus \langle v_1, \dots, v_{n-1}\rangle
\end{aligned}$$

donc le nombre de telles familles est $(q^{2n}-1)(q^{2n-1}-q)\dots(q^{n+1}-q^{n-1})$. Une famille $\{v_1, \dots, v_n\}$ est une base adaptée du drapeau isotrope $V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n$ si et seulement si

$$\begin{aligned}
&v_1 \in V_1 \setminus \{0\}\\
&v_2 \in V_2 \setminus V_1\\
&\dots\\
&v_n \in V_n \setminus V_{n-1}
\end{aligned}$$

donc le nombre de telles bases est $(q-1)(q^2-q)\dots(q^n-q^{n-1})$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
|\mathbb{F}_\omega(\mathbb{F}_q^{2n})| &= \frac{(q^{2n}-1)(q^{2n-1}-q)\dots(q^{n+1}-q^{n-1})}{(q-1)(q^2-q)\dots(q^n-q^{n-1})}\\
&= \frac{(q^{2n}-1)(q^{2n-2}-1)\dots(q^2-1)}{(q-1)^n}.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit, d'après la formule (3.6) ci-dessus, que

$$|\mathbb{F}_\omega(\mathbb{F}_q^{2n+1})| = \frac{(q^{n+1}-1)(q^{2n}-1)(q^{2n-2}-1)\dots(q^2-1)}{(q-1)^{n+1}}, \tag{3.7}$$

et d'après la proposition 3.2.16 ce polynôme en la variable q est le polynôme de Poincaré de la variété de drapeaux symplectiques impaire $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$.

3.2.17. Afin d'interpréter ce résultat, il est utile de rappeler maintenant un schéma général de calcul du polynôme de Poincaré des variétés de drapeaux G/B des groupes semi-simples. Si G est un groupe semi-simple complexe, $B \subset G$ un sous-groupe de Borel et $T \subset B$ un tore maximal, la variété de drapeaux G/B a une décomposition cellulaire

$$G/B = \bigsqcup_{w \in W} BwB/B$$

dont les cellules sont les cellules de Schubert $C_w = BwB/B$ associées aux éléments w du groupe de Weyl $W = N_G(T)/T$ de G ; la cellule C_w est isomorphe à un espace affine de dimension $\ell(w)$ – la longueur de $w \in W$. Il n'y a donc pas de cellule de dimension réelle impaire, et par conséquent, les classes des adhérences des cellules forment une base comme

$\mathbb{Z}$-module de l'anneau de cohomologie singulière $H^*(G/B,\mathbb{Z})$. Le polynôme de Poincaré de G/B est donc

$$P(G/B,t) = \sum_{w\in W} t^{\ell(w)}.$$

Ce polynôme s'exprime d'une façon convenable en fonction des *exposants* du groupe de Weyl W qui sont définis comme suit. Le groupe W agit naturellement sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$ du tore T et donc sur l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{t}^*)$ des polynômes sur $\mathfrak{t}$. Par un théorème dû à Chevalley, l'algèbre des invariants $S(\mathfrak{t}^*)^W$ est aussi une algèbre de polynômes : plus précisément, il existe des invariants $P_1,\dots,P_r \in S(\mathfrak{t}^*)^W$ tels que $S(\mathfrak{t}^*)^W = \mathbb{C}[P_1,\dots,P_r]$; ici $r = \dim \mathfrak{t}$ est le rang de G. Les entiers $e_1,\dots,e_r$ tels que $\deg P_i = e_i + 1$, $1 \leqslant i \leqslant r$ sont les *exposants* de W.

Le polynôme de Poincaré de G/B s'écrit alors

$$P(G/B,t) = \prod_{i=1}^{r} \frac{t^{e_i+1}-1}{t-1}. \tag{3.8}$$

Les exposants des groupes de Weyl des groupes classiques sont donnés dans les tables de [Bou68]. En fait, pour chacun des groupes classiques on peut facilement expliciter l'algèbre des invariants $S(\mathfrak{t}^*)^W$:

– *en type* A_n : $\mathfrak{t}^*$ est le quotient de l'espace vectoriel de base $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n+1}$ par la relation $\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_{n+1}=0$; $W = W(\mathsf{A}_n)$ est le groupe de permutations S_{n+1} qui agit sur $\mathfrak{t}^*$ en permutant les $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n+1}$. L'algèbre des invariants $S(\mathfrak{t}^*)^W$ est donc l'anneau des polynômes symétriques modulo $\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_{n+1}$ qui est engendré par les classes modulo $\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_{n+1}$ des polynômes symétriques élémentaires[11]

$$\begin{aligned} e_2(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n+1}) &= \sum_{i,j} \varepsilon_i\varepsilon_j \\ e_3(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n+1}) &= \sum_{i,j,k} \varepsilon_i\varepsilon_j\varepsilon_k \\ &\vdots \\ e_{n+1}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n+1}) &= \varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_{n+1}. \end{aligned}$$

Les exposants de $W(\mathsf{A}_n)$ sont donc : $1,2,\dots,n$.

– *en type* C_n *(et* B_n*)* : $\mathfrak{t}^*$ a comme base les caractères $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$; $W = W(\mathsf{C}_n)$ est le groupe de permutations signées sur les lettres $\{1,\dots,n\}$ qui agit sur $\mathfrak{t}^*$ en permutant et en changeant les signes des vecteurs $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$. L'algèbre des invariants $S(\mathfrak{t}^*)^W$ est la sous-algèbre de $S(\mathfrak{t}^*)$ engendrée par les polynômes

$$\begin{aligned} e_1(\varepsilon_1^2,\dots,\varepsilon_n^2) &= \sum_{i} \varepsilon_i^2 \\ e_2(\varepsilon_1^2,\dots,\varepsilon_n^2) &= \sum_{i,j} \varepsilon_i^2\varepsilon_j^2 \\ &\vdots \\ e_n(\varepsilon_1^2,\dots,\varepsilon_n^2) &= (\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_n)^2. \end{aligned}$$

Les exposants de $W(\mathsf{C}_n)$ sont donc : $1,3,5,\dots,2n-1$.

[11] $e_1(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n+1}) = \varepsilon_1+\dots+\varepsilon_{n+1}$ est donc nul dans $S(\mathfrak{t}^*)^W$.

– *en type* D_n : $\mathfrak{t}^*$ a comme base les caractères $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$; $W = W(\mathsf{D}_n)$ est le sous-groupe d'indice 2 de $W(\mathsf{C}_n)$ formé par les permutations signées qui changent seulement un nombre *pair* de signes. L'action de W sur $\mathfrak{t}^*$ est la restriction de l'action de $W(\mathsf{C}_n)$, et l'algèbre des invariants $S(\mathfrak{t}^*)^W$ est la sous-algèbre de $S(\mathfrak{t}^*)$ engendrée par les polynômes

$$\begin{aligned} &e_1(\varepsilon_1^2, \ldots, \varepsilon_n^2) \\ &\vdots \\ &e_{n-1}(\varepsilon_1^2, \ldots, \varepsilon_n^2) \\ &e_n(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n). \end{aligned}$$

Les exposants de $W(\mathsf{D}_n)$ sont donc : $1, 3, 5, \ldots, 2n-3, n-1$.

En utilisant cette liste et en comparant les formules (3.7) et (3.8) on s'aperçoit du fait suivant :

Proposition 3.2.18. *Le polynôme de Poincaré de* $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ *coïncide avec le polynôme de Poincaré de la variété de drapeaux en type* D_{n+1}

$$P(\mathbb{F}_\omega(2n+1), t) = P(\mathbb{F}_Q(2n+2), t).$$

Rappelons que la variété de drapeaux $\mathbb{F}_Q(2n+2)$ en type D_{n+1} est l'espace homogène SO_{2n+2}/B, où $B \subset \mathrm{SO}_{2n+2}$ est un sous-groupe de Borel, qui s'identifie à la variété des drapeaux $V_1 \subset \cdots \subset V_n \subset \mathbb{C}^{2n+2}$ de sous-espaces isotropes par rapport à une forme quadratique non dégénérée $Q \in S^2(\mathbb{C}^{2n+2})^*$; rappelons également que $\mathbb{F}_Q(2n+2)$ s'identifie à chacune des deux composantes connexes de la variété des drapeaux isotropes maximaux $V_1 \subset \cdots \subset V_n \subset V_{n+1} \subset \mathbb{C}^{2n+2}$, puisque chaque drapeau isotrope $V_1 \subset \cdots \subset V_n \subset \mathbb{C}^{2n+2}$ se complète en exactement deux drapeaux isotropes maximaux $V_1 \subset \cdots \subset V_n \subset V_{n+1} \subset \mathbb{C}^{2n+2}$

La proposition précédente montre qu'il existe une bijection entre les ensembles $W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ et $W(\mathsf{D}_{n+1})$ – qui ont clairement le même nombre d'éléments – qui, de surcroît, préserve la longueur.

3.2.19. Voici maintenant, comme annoncé, une deuxième méthode de calcul du polynôme de Poincaré de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$; cette méthode utilise directement la combinatoire du groupe de Weyl $W(\mathrm{Sp}_{2n+2})$ et fait ressortir de manière plus explicite une certaine symétrie de $W(\mathrm{Sp}_{2n+2})$.

Soit $\tilde{w}_0 = \bar{0}\bar{1}\ldots\bar{n}$ le plus grand élément du groupe de Weyl $W(\mathrm{Sp}_{2n+2})$ (cf. n° A.1.6). C'est un élément d'ordre 2, donc la multiplication par $\tilde{w}_0$ est une involution de $W(\mathrm{Sp}_{2n+2})$. Cette involution agit sur une permutation signée $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+2})$ en changeant tous les signes de w en leurs opposés ; par exemple, dans $W(\mathrm{Sp}_8)$ on a $\tilde{w}_0 \cdot \bar{1}0\bar{2}3 = 1\bar{0}2\bar{3}$. En particulier, on remarque que $\tilde{w}_0\cdot$ envoie bijectivement $W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ sur son complémentaire $W(\mathrm{Sp}_{2n+2}) \setminus W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$.

Pour tout $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+2})$ on a

$$\ell(\tilde{w}_0 w) = \ell(\tilde{w}_0) - \ell(w) ;$$

cette égalité est plus généralement vérifiée pour tout groupe de Weyl. Notons

$$\begin{aligned} B_k &= \operatorname{rang} H^{2k}(\mathbb{F}_\omega(2n+1), \mathbb{Z}) \\ \tilde{B}_k &= \operatorname{rang} H^{2k}(\mathbb{F}_\omega(2n+2), \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

les nombres de Betti de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$, respectivement $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$; on a

$$\begin{aligned} B_k &= \mathrm{card}\{w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1}) \mid \ell(w) = k\} \\ \tilde{B}_k &= \mathrm{card}\{w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+2}) \mid \ell(w) = k\} \end{aligned}$$

et on prend ceci pour définition de B_k et $\tilde{B}_k$ lorsque $k < 0$. D'après les remarques précédentes, tenant aussi compte du fait que $\ell(\tilde{w}_0) = (n+1)^2$, il résulte que la multiplication par $\tilde{w}_0$ établit une bijection

$$\{w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1}) \mid \ell(w) = k\} \xrightarrow{\simeq} \{w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+2}) \setminus W(\mathrm{Sp}_{2n+1}) \mid \ell(w) = (n+1)^2 - k\}$$

donc en particulier on a $B_k = \tilde{B}_{(n+1)^2-k} - B_{(n+1)^2-k}$. Or par dualité de Poincaré pour les variétés lisses $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$ et $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ on a

$$\begin{aligned} &\tilde{B}_{(n+1)^2-k} = \tilde{B}_k, \text{ respectivement} \\ &B_{(n+1)^2-k} = B_{n(n+1)-(n+1)^2+k} = B_{k-(n+1)}, \end{aligned}$$

d'où

$$\tilde{B}_k = B_k + B_{k-(n+1)},$$

ceci étant vrai pour tout $k \in \mathbb{Z}$. On obtient alors

$$\begin{aligned} P(\mathbb{F}_\omega(2n+2), t) &= \sum_k \tilde{B}_k t^k = \sum_k (B_k + B_{k-(n+1)}) t^k \\ &= \sum_k B_k t^k + t^{n+1} \sum_k B_{k-(n+1)} t^{k-(n+1)} \\ &= (1 + t^{n+1}) P(\mathbb{F}_\omega(2n+1), t). \end{aligned}$$

Étant donné que les exposants de $W(\mathrm{Sp}_{2n+2})$ sont $1, 3, \ldots, 2n+1$, par la formule (3.8) on obtient

$$\begin{aligned} P(\mathbb{F}_\omega(2n+1), t) &= \frac{1}{t^{n+1}+1} P(\mathbb{F}_\omega(2n+2), t) = \frac{1}{t^{n+1}+1} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{t^{2k}-1}{t-1} \\ &= \frac{t^{n+1}-1}{t-1} \prod_{k=1}^{n} \frac{t^{2k}-1}{t-1}, \end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat obtenu précédemment.

3.2.20. Puisque le polynôme de Poincaré de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ est le même que celui de $\mathbb{F}_Q(2n+2)$ on pourrait se demander si c'est encore le cas pour les grassmanniennes respectives, c'est-à-dire si le polynôme de Poincaré de $G_\omega(k, 2n+1)$ est le même que celui de la grassmannienne quadratique $G_Q(k, 2n+2)$ des k-plans de $\mathbb{C}^{2n+2}$ isotropes pour une forme quadratique non dégénérée $Q \in S^2(\mathbb{C}^{2n+2})^*$.

Calculons donc, pour répondre à cette question, le polynôme de Poincaré de $G_Q(k, 2n+2)$. Pour pouvoir appliquer la méthode utilisée pour les grassmanniennes symplectiques impaires, remarquons que la variété $G_Q(k, 2n+2)$ admet un modèle sur $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire que c'est l'ensemble des $\mathbb{C}$-points du complexifié d'un schéma de type fini. En effet, ceci découle du fait qu'il y a une base $\{e_1, \ldots, e_{2n+2}\}$ dans laquelle la forme quadratique Q s'écrit

$$Q = \sum_{i=1}^{2n+2} e_i^* e_{2n+3-i}^* \tag{3.9}$$

ce qui entraîne que $G_Q(k, 2n+2)$ est définie dans $\mathbb{P}\Lambda^k\mathbb{C}^{2n+2}$ par des équations à coefficients entiers. Si alors $q = p^m$ est une puissance d'un nombre premier p, la valeur $P(G_Q(k, 2n+2), q)$ du polynôme de Poincaré de $G_Q(k, 2n+2)$ est égale au nombre de $\mathbb{F}_q$-points de la $\mathbb{F}_q$-grassmannienne quadratique $G_Q(k, \mathbb{F}_q^{2n+2})$ des k-plans de $\mathbb{F}_q^{2n+2}$ isotropes pour la forme (3.9), considérée maintenant comme forme quadratique sur $\mathbb{F}_q^{2n+1}$. Ceci est, à nouveau, une conséquence du fait que la décomposition de Schubert de $G_Q(k, 2n+2)$ reste vraie pour $G_Q(k, \mathbb{F}_q^{2n+1})$.[12]

Pour calculer le nombre de $\mathbb{F}_q$-points de $G_Q(k, \mathbb{F}_q^{2n+2})$ on compte les familles $\{v_1, \ldots, v_k\}$ qui sont bases de sous-espaces isotropes ; le sous-espace $\langle v_1, \ldots, v_k\rangle$ est isotrope si et seulement si

$$\begin{aligned} & v_1 \in \mathbb{F}_q^{2n+2} \setminus \{0\} \text{ et } Q(v_1) = 0 \\ & v_2 \in \langle v_1\rangle^\perp \setminus \langle v_1\rangle \text{ et } Q(v_2) = 0 \\ & \ldots \\ & v_k \in \langle v_1, \ldots, v_{k-1}\rangle^\perp \setminus \langle v_1, \ldots, v_{k-1}\rangle \text{ et } Q(v_k) = 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

et l'on remarque que la i-ème condition signifie que la classe

$$v_i \bmod \langle v_1, \ldots, v_{i-1}\rangle \in \langle v_1, \ldots, v_{i-1}\rangle^\perp / \langle v_1, \ldots, v_{i-1}\rangle$$

est un vecteur isotrope non nul pour la forme quadratique non dégénérée induite par Q sur l'espace quotient $\langle v_1, \ldots, v_{i-1}\rangle^\perp / \langle v_1, \ldots, v_{i-1}\rangle$.

On est ainsi ramené au calcul du nombre de vecteurs isotropes pour une forme quadratique non dégénérée sur un $\mathbb{F}_q$-espace de dimension paire, c'est-à-dire le nombre N_{2r} de solutions dans $\mathbb{F}_q^{2r}$ de l'équation $f(x_1, \ldots, x_{2r}) = 0$ pour $f \in S^2(\mathbb{F}_q^{2r})^*$ non dégénérée. Remarquons que

$$\frac{N_{2r} - 1}{q - 1}$$

est alors le nombre de $\mathbb{F}_q$-points de la quadrique non dégénérée

$$(f = 0) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{2r-1}.$$

Ce nombre est explicité dans [Sch76, théorème 2E] par la formule

$$N_{2r} = q^{2r-1} + (q-1)q^{r-1}\left(\frac{(-1)^r \det f}{q}\right) \tag{3.11}$$

où $\det f \in \mathbb{F}_q^*$ est le déterminant de f (le déterminant de la matrice de f dans une base quelconque – bien défini modulo un carré) et où pour $x \in \mathbb{F}_q^*$

$$\left(\frac{x}{q}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est un carré} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

est le symbole de Legendre.

Le nombre des familles de vecteurs $\{v_1, \ldots, v_k\}$ qui vérifient les conditions (3.10) est

$$(N_{2n+2} - 1)q(N_{2n} - 1)q^2(N_{2n-2} - 1)\ldots q^{k-1}(N_{2n-2k+4} - 1). \tag{3.12}$$

[12] Les cellules de Schubert de $G_Q(k, 2n+2)$ ont des descriptions qui font intervenir des matrices très similaires à celles du n° 2.2.8 et qui sont indépendantes du corps de base.

En remarquant maintenant que le déterminant de la forme Q de (3.9) est $(-1)^{n+1}$ et que plus généralement le déterminant de la forme induite par Q sur $\langle v_1, \dots, v_{i-1}\rangle^\perp / \langle v_1, \dots, v_{i-1}\rangle$ est $(-1)^{n-i}$, on obtient, d'après la formule (3.11) :

$$N_{2r} = q^{2r-1} + (q-1)q^{r-1}.$$

Alors $N_{2r} - 1 = (q^r+1)(q^{r-1}-1)$ et (3.12) devient

$$\begin{aligned}&(q^{n+1}-1)(q^n+1)q(q^n-1)(q^{n-1}+1)\dots q^{k-1}(q^{n-k+2}-1)(q^{n-k+1}+1)\\ &\quad = q^{1+2+\dots+(k-1)}(q^{n+1}-1)(q^{n-k+1}+1)(q^{2n}-1)(q^{2n-2}-1)\dots(q^{2n-2k+4}-1).\end{aligned}$$

En divisant ce nombre par le nombre de bases d'un sous-espace de dimension k de $\mathbb{F}_q^{2n+2}$ fixé, qui est

$$(q^k-1)(q^k-q)\dots(q^k-q^{k-1}),$$

on obtient

$$|G_Q(k, \mathbb{F}_q^{2n+2})| = \frac{(q^{n+1}-1)(q^{n-k+1}+1)(q^{2n}-1)(q^{2n-2}-1)\dots(q^{2n-2k+4}-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\dots(q-1)}. \tag{3.13}$$

Ceci est donc le polynôme de Poincaré de la grassmannienne quadratique $G_Q(k, 2n+2)$; en remarquant que $(q^{n+1}-1)(q^{n-k+1}+1) \neq q^{2n-k+2}-1$ et en comparant avec la formule (2.10) on s'aperçoit que $G_\omega(k, 2n+1)$ et $G_Q(k, 2n+2)$ n'ont pas les mêmes polynômes de Poincaré.

Remarque 3.2.21. Le nombre de $\mathbb{F}_q$-points sur une quadrique non dégénérée définie sur $\mathbb{F}_q$ dépend, d'après la formule (3.11), du déterminant de la forme quadratique qui définit la quadrique. Ceci est en concordance avec le fait que sur $\mathbb{F}_q$ les formes quadratiques non dégénérées sont groupées en deux classes d'équivalence, selon que le déterminant est ou non un carré (cf. [Ser77, ch. IV §1.7]). Au contraire, sur $\mathbb{C}$ toutes les formes quadratiques non dégénérées sont équivalentes. On peut donc remplacer la forme quadratique (3.9) par une autre forme à coefficients entiers qui lui est équivalente sur $\mathbb{C}$ – ce qui ne change pas la grassmannienne quadratique $G_Q(k, 2n+2)$ – mais qui ne lui est pas équivalente sur $\mathbb{F}_q$ – ce qui change donc le nombre de points de $G_Q(k, \mathbb{F}_q^{2n+2})$. Ceci paraît donc infirmer le raisonnement qui nous a conduit ci-dessus à la formule (3.13).

En réalité, il n'y a aucune contradiction : si Q' est une forme quadratique non dégénérée à coefficients entiers qui n'est pas équivalente sur $\mathbb{F}_q$ à la forme (3.9), alors la $\mathbb{F}_q$-grassmannienne quadratique $G_{Q'}(k, \mathbb{F}_q^{2n+2})$ n'admet pas la même décomposition de Schubert que $G_Q(k, \mathbb{F}_q^{2n+2})$. En effet, cette décomposition est définie par rapport à un drapeau isotrope maximal dans $\mathbb{F}_q^{2n+2}$, ce qui implique en particulier l'existence dans $\mathbb{F}_q^{2n+2}$ d'un sous-espace isotrope de dimension $n+1$. Or si un tel sous-espace Q'-isotrope existe, la matrice de Q' dans une base convenable est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ {}^tA & 0 \end{pmatrix}, \quad A \in \mathrm{M}_{n+1}(\mathbb{F}_q),$$

et son déterminant est donc $(-1)^{n+1}(\det A)^2$, ce qui implique que Q' et la forme (3.9) sont équivalentes sur $\mathbb{F}_q$ et donc contredit l'hypothèse qu'on a fait sur Q'.

Chapitre 4

Un théorème de Borel-Weil pour le groupe symplectique impair

Soit G un groupe semi-simple complexe ; le théorème classique de Borel-Weil identifie la structure de G-module de l'espace des sections globales d'un fibré en droites G-linéarisé sur la variété de drapeaux généralisée G/B du groupe G. L'énoncé précis de ce théorème est le suivant :

Théorème (Borel-Weil). *Soit λ un poids dominant et L_λ le fibré en droites sur $G/B = G/B^-$ dont la fibre au point base $1B^- \in G/B^-$ est le B^--module de dimension 1 de poids λ. Alors le G-module $H^0(G/B^-, L_\lambda)$ est isomorphe au G-module irréductible de plus haut poids λ.*

Ce théorème est en quelque sorte un exemple prototype de résultat qui relie la géométrie des G-variétés et la théorie des représentations de G. Dans ce chapitre on va formuler un théorème analogue pour le groupe symplectique impair ; en l'occurrence, notre théorème établit un lien entre la géométrie de la variété de drapeaux symplectiques impaire $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ et la théorie des représentations du groupe Sp_{2n+1}. Dans ce contexte, deux obstacles à la généralisation immédiate de l'énoncé précédent sont plus saillants. Le premier provient du fait que la variété des drapeaux symplectiques impaire $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ n'est pas homogène : on ne dispose donc plus d'un procédé canonique pour définir des fibrés Sp_{2n+1}-linéarisés sur $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$. Le deuxième obstacle vient de ce que le groupe Sp_{2n+1} n'est pas réductif : le théorème de complète réductibilité est faux pour Sp_{2n+1} c'est-à-dire que certains Sp_{2n+1}-modules ne se décomposent pas en somme directe de sous-modules irréductibles, donc la théorie des représentations de Sp_{2n+1} est plus compliquée que celle d'un groupe semi-simple.

Il n'est donc pas clair a priori par quoi remplacer les modules irréductibles dans l'énoncé d'un éventuel théorème de Borel-Weil pour Sp_{2n+1}. On peut déjà se convaincre que les Sp_{2n+1}-modules irréductibles ne sont pas de bons candidats : un Sp_{2n+1}-module irréductible est déjà irréductible en tant que Sp_{2n}-module. En effet, comme le radical unipotent U de Sp_{2n+1} est un sous-groupe distingué, pour tout Sp_{2n+1}-module V le sous-espace des U-invariants V^U est encore un Sp_{2n+1}-sous-module[1] ; or, par le théorème de Lie-Kolchin, le sous-groupe unipotent U fixe au moins un vecteur non nul de V, le sous-espace V^U n'est donc pas réduit à (0), et par conséquent si le Sp_{2n+1}-module V est irréductible alors U agit trivialement dans V et alors V est irréductible comme Sp_{2n}-module.

[1]Il suffit d'écrire, pour $x \in V^U, g \in \mathrm{Sp}_{2n+1}, u \in U : ugx = g(g^{-1}ug)x = gx$.

Les Sp_{2n+1}-modules irréductibles ne sont donc pas tout aussi représentatifs pour la théorie des représentations de Sp_{2n+1} que leurs correspondants pour un groupe semi-simple. On se tourne alors vers d'autres classes de modules qui apparaissent dans la littérature : Proctor a étudié dans [Pro88] des Sp_{2n+1}-modules qui sont indécomposables et possèdent des propriétés intéressantes, par exemple leurs caractères s'expriment par une formule analogue à la formule bien connue de Weyl. De son côté, Shtepin a introduit dans [Sht93] une classe de modules pour le groupe symplectique impair intermédiaire $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$ qui partagent de nombreuses propriétés avec les Sp_{2n}-modules irréductibles.

Nous allons montrer que les $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$-modules de Shtepin se retrouvent comme espaces de sections globales de certains fibrés en droites $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$-linéarisés sur la variété de drapeaux symplectiques impaire $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$. Plus précisément l'énoncé de notre théorème est le suivant :

Théorème (Borel-Weil pour $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$). *Soit λ un poids dominant de Sp_{2n+2}, $\lambda = a_0\omega_0 + \cdots + a_n\omega_n$, $a_0, \ldots, a_n \geqslant 0$; soit L_λ le fibré en droites sur $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$*

$$L_\lambda = (\det T_1^*)^{\otimes a_0} \otimes (\det T_2^*)^{\otimes a_1} \otimes \cdots \otimes (\det T_{n+1}^*)^{\otimes a_n}$$

où T_i est le fibré tautologique de rang i. Alors le $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$-module $H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+1), L_\lambda)$ est isomorphe au dual du $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$-module de Shtepin de plus haut poids λ.

Notons que puisque $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ est une sous-variété de Schubert dans $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$, l'espace des sections globales $H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+1), L_\lambda)$ est un module de Demazure. Le théorème précédent peut alors se déduire de la théorie générale des modules de Demazure, mais nous allons avoir une approche différente, en utilisant le fait que $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ est le lieu d'annulation d'une section d'un fibré vectoriel sur $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$.

Nous démontrons par la suite que les $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$-modules introduits par Shtepin possèdent également une structure de Sp_{2n+1}-module, compatible avec le morphisme de restriction naturel $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1} \to \mathrm{Sp}_{2n+1}$ et que les Sp_{2n+1}-modules ainsi obtenus coïncident avec les Sp_{2n+1}-modules étudiés par Proctor. Une simple reformulation du théorème précédent constituera alors un théorème de Borel-Weil pour le groupe symplectique impair Sp_{2n+1}.

Théorème (Borel-Weil pour Sp_{2n+1}). *Avec les mêmes notations que dans l'énoncé précédent, le Sp_{2n+1}-module $H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+1), L_\lambda)$ est isomorphe au dual du Sp_{2n+1}-module de Proctor $S_{\langle\lambda\rangle}\mathbb{C}^{2n+1}$ de plus haut poids λ.*

4.1 La construction de Shtepin

Nous commençons par examiner la construction de Shtepin d'une classe de $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$-modules ayant certaines propriétés similaires à celles des Sp_{2n}-modules irréductibles. La démarche de Shtepin a son origine dans le constat suivant : si V est un Sp_{2n+2}-module irréductible, alors la décomposition de V en tant que Sp_{2n}-module en composantes irréductibles contient en général des composantes multiples. Par exemple, ceci est le cas déjà pour la représentation standard $\mathbb{C}^{2n+2}$ de Sp_{2n+2} dont la décomposition en Sp_{2n}-sous-modules irréductibles est $\mathbb{C}^{2n} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. Shtepin s'attache à trouver une méthode pour séparer les Sp_{2n}-composantes multiples d'un Sp_{2n+2}-module irréductible, c'est-à-dire pour distinguer entre les différentes Sp_{2n}-composantes isomorphes d'un Sp_{2n+2}-module irréductible. La solution qu'il propose à ce problème consiste à introduire le groupe symplectique impair intermédiaire $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$ afin de réaliser la restriction

$\mathrm{Sp}_{2n+2} \downarrow \mathrm{Sp}_{2n}$ en deux temps. En l'occurrence, Shtepin construit dans chaque Sp_{2n+2}-module irréductible V une filtration par des $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$-sous-modules

$$V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_s \subset V$$

dont les quotients V_{i+1}/V_i sont des Sp_{2n}-modules sans multiplicité ; deux Sp_{2n}-composantes irréductibles isomorphes de V – c'est-à-dire deux copies d'une même composante multiple – vont donc toujours se retrouver dans des quotients différents de la filtration,[2] et en conséquence, pour distinguer ces composantes il suffit de préciser quels sont les quotients qui les contiennent.

Une motivation pour la recherche d'une méthode pour séparer les composantes multiples dans la restriction $\mathrm{Sp}_{2n+2} \downarrow \mathrm{Sp}_{2n}$ est la construction de bases de Gelfand-Tsetlin dans les Sp_{2n+2}-modules irréductibles.

Rappelons le schéma général de cette construction : considérons une suite de groupes semi-simples $G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_n$ (on pourra prendre par exemple $G_n = \mathrm{SL}_{n+1}$) telle que chaque restriction $G_{i+1} \downarrow G_i$ est sans multiplicité – au sens où tout G_i-module irréductible apparaît avec multiplicité au plus 1 dans la décomposition d'un G_{i+1}-module irréductible ; supposons également que tout G_1-module irréductible a des poids de multiplicité 1. Notons alors,

$$\lambda_i \longrightarrow \lambda_{i+1}$$

si le G_i-module irréductible de plus haut poids λ_i apparaît dans la décomposition du G_{i+1}-module irréductible de plus haut poids λ_{i+1}, respectivement

$$\lambda \longrightarrow \lambda_1$$

si λ est un poids du G_1-module irréductible de plus haut poids λ_1. Alors le G_n-module irréductible de plus haut poids λ_n a une base indexée par les *diagrammes de Gelfand-Tsetlin*

$$\lambda \longrightarrow \lambda_1 \longrightarrow \lambda_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \lambda_{n-1} \longrightarrow \lambda_n.$$

Bien sûr ceci n'est vraiment utile en pratique que si l'on peut expliciter les relations de dominance $\lambda_i \to \lambda_{i+1}$, c'est-à-dire si l'on connaît la *règle de branchement* qui précise comment se décompose un $Gi+1$-module simple en G_i-composantes irréductibles.

Bien entendu, ce procédé ne fonctionne pas sous cette forme pour le groupe symplectique Sp_{2n+2} parce que, d'après ce qu'on a vu, la restriction $\mathrm{Sp}_{2n+2} \downarrow \mathrm{Sp}_{2n}$ n'est pas sans multiplicité. Shtepin remarque cependant que les quotients de la filtration qu'il construit dans un Sp_{2n+2}-module irréductible sont tous des $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$-modules engendrés par un vecteur de plus haut poids, et qu'en outre, ce plus haut poids détermine le quotient en question indépendamment du Sp_{2n+2}-module ambiant. En cela que ces quotients sont identifiables par la donnée d'un plus haut poids, ils jouent un rôle similaire dans la théorie des représentations de $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$ à celui des modules irréductibles dans la théorie des représentations de Sp_{2n}.

Notons alors, par analogie avec les notations ci-dessus,

$$\lambda_{2i+1} \longrightarrow \lambda_{2i+2}$$

[2]Rappelons ici que, grâce à la complète réductibilité, tout Sp_{2n}-module V qui est muni d'une filtration par des Sp_{2n}-sous-modules est isomorphe comme Sp_{2n}-sous module au gradué associé $\mathrm{Gr}\, V = \bigoplus_i V_{i+1}/V_i$.

si λ_{2i+1} est le plus haut poids d'un quotient de la filtration de Shtepin du Sp_{2n+2}-module irréductible de plus haut poids λ_{2i+2}, respectivement,

$$\lambda_{2i} \longrightarrow \lambda_{2i+1}$$

si le Sp_{2i}-module irréductible de plus haut poids λ_{2i} apparaît dans la décomposition d'un quotient d'une filtration de Shtepin de plus haut poids λ_{2i+1}. Alors les $\mathrm{Sp}_2 = \mathrm{SL}_2$-composantes irréductibles du Sp_{2n+2}-module irréductible de plus haut poids λ_{2n+2} sont paramétrées par les diagrammes

$$\lambda_2 \longrightarrow \lambda_3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \lambda_{2n} \longrightarrow \lambda_{2n+1} \longrightarrow \lambda_{2n+2}$$

et en particulier, si l'on note $\lambda \to \lambda_2$ lorsque λ est un poids du Sp_2-module de plus haut poids λ_2, alors le Sp_{2n+2}-module de plus haut poids λ_{2n+2} possède une base indexée par les diagrammes de Gelfand-Tsetlin

$$\lambda \longrightarrow \lambda_2 \longrightarrow \lambda_3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \lambda_{2n} \longrightarrow \lambda_{2n+1} \longrightarrow \lambda_{2n+2}.$$

De même, les Sp_{2n}-composantes du Sp_{2n+2}-module irréductible $V_{\lambda_{2n+2}}$ de plus haut poids λ_{2n+2} sont paramétrées par les diagrammes

$$\lambda_{2n} \longrightarrow \lambda_{2n+1} \longrightarrow \lambda_{2n+2}\ ;$$

la règle de branchement correspondante

$$V_\lambda = \bigoplus_{\nu \longrightarrow \mu \longrightarrow \lambda} V''_\nu \tag{4.1}$$

où V''_ν désigne le Sp_{2n}-module irréductible de plus haut poids ν, avait déjà été explicitée par Želobenko : pour $\lambda = (\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{n+1})$, $\mu = (\mu_1 \geqslant \cdots \geqslant \mu_{n+1})$ et $\nu = (\nu_1 \geqslant \cdots \geqslant \nu_n)$, $\mu \to \lambda$ signifie

$$\lambda_1 \geqslant \mu_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_n \geqslant \lambda_{n+1} \geqslant \mu_{n+1}$$

et $\nu \to \mu$ signifie

$$\mu_1 \geqslant \nu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_n \geqslant \nu_n \geqslant \mu_{n+1}.$$

Mais Želobenko ne donne pas une interprétation pour les poids intermédiaires μ ou pour les sommes partielles

$$\bigoplus_{\nu \longrightarrow \mu} V''_\nu.$$

La construction de Shtepin éclaire donc en particulier ces questions.

4.1.1 Le modèle de Želobenko

Pour construire sa filtration dans un Sp_{2n+2}-module irréductible, Shtepin utilise un modèle dû à Želobenko (cf. [Žel62]) qui réalise explicitement ce module comme espace de fonctions régulières sur un sous-groupe unipotent maximal de Sp_{2n+2}. Cette construction de Želobenko est réalisable plus généralement pour tout groupe algébrique semi-simple et c'est dans ce cadre plus général que nous allons la revoir ici.

Soit donc G un groupe semi-simple, $B \subset G$ un sous-groupe de Borel et $T \subset B$ un tore maximal ; soit également B^- le sous-groupe de Borel opposé à B et notons U^+ et U^- les sous-groupes unipotents maximaux de B respectivement B^-. On a alors

$$B \cap B^- = T, \qquad B = T \ltimes U^+, \qquad B^- = T \ltimes U^-.$$

Dans le système de racines de G on choisit comme racines positives les racines de B.

À chaque poids dominant λ, Želobenko fait correspondre un sous-espace dans l'algèbre $\mathbb{C}[U^+]$ des fonctions régulières sur le groupe U^+ et une action du groupe G dans ce sous-espace qui prolonge l'action naturelle de U^+ dans $\mathbb{C}[U^+]$ par translation à droite :

$$\forall f \in \mathbb{C}[U^+], \quad \forall x, y \in U^+ : \qquad (x \cdot f)(y) = f(yx).$$

La construction de Želobenko fait appel à la notion de décomposition de Gauss ; nous en rappelons la définition :

Définition 4.1.1. On dit qu'un élément $g \in G$ admet une *décomposition de Gauss* si on peut l'écrire sous la forme

$$g = g_- g_0 g_+ \text{ avec } g_- \in U^-, \ g_0 \in T, \ g_+ \in U^+ \ ;$$

si elle existe, une telle décomposition est unique, et on l'appelle la *décomposition de Gauss* de g. On dit qu'un élément qui admet une décomposition de Gauss est *régulier* ; on dit alors que le groupe G admet une décomposition de Gauss si un élément générique de G est régulier.

Tout groupe réductif admet alors une décomposition de Gauss ; en effet, on peut voir cette notion comme étant une version partielle de la décomposition de Bruhat : on a

$$G = \bigsqcup_{w \in W} BwB,$$

la $B \times B$ orbite ouverte est Bw_0B où $w_0 \in W$ est l'élément de plus grande longueur ; alors

$$w_0 B w_0 B = B^- B = U^- T U^+$$

est encore un ouvert de G ce qui prouve que G admet une décomposition de Gauss.

Notation 4.1.2. Si $g \in G$ est un élément régulier on désigne par g_-, g_0 et g_+ ses composantes dans la décomposition de Gauss.

Remarque 4.1.3. Pour $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, les composantes g_-, g_0, g_+ d'un élément régulier peuvent être explicitées en fonction des mineurs de g.

En effet dans ce cas T est le sous-groupe des matrices diagonales inversibles, U^+ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures ayant des 1 sur la diagonale et U^- est le sous-groupe des matrices triangulaires inférieures ayant des 1 sur la diagonale. Notons $\Delta_p(g)$ le p-ième mineur principal de g, donné par les p premières lignes et colonnes de g, $\Delta_{pq}(g)$ le mineur obtenu à partir de $\Delta_p(g)$ en remplaçant la p-ième colonne par la q-ième colonne respectivement $\Delta^{pq}(g)$ le mineur obtenu à partir de $\Delta_p(g)$ en remplaçant la p-ième ligne par la q-ième ligne, c'est-à-dire $\Delta^{pq}(g) = \Delta_{pq}({}^t g)$. Alors, par la formule de Binet-Cauchy on obtient respectivement

$$\begin{aligned} \Delta_p(g) &= \Delta_p(g_- g_0 g_+) = \Delta_p(g_0) \\ \Delta_{pq}(g) &= \Delta_{pq}(g_- g_0 g_+) = \Delta_p(g_0)\Delta_{pq}(g_+) = \Delta_p(g_0)(g_+)_{pq} \\ \Delta^{pq}(g) &= \Delta^{pq}(g_- g_0 g_+) = \Delta^{pq}(g_-)\Delta_p(g_0) = (g_-)_{pq}\Delta_p(g_0). \end{aligned}$$

On en déduit qu'un élément $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est régulier si et seulement si tous ses mineurs principaux sont non nuls

$$\Delta_p(g) \neq 0, \ \text{ pour tout } 1 \leqslant p \leqslant n$$

et alors ses composantes de Gauss sont données par

$$
\begin{aligned}
g_0 &= \operatorname{diag}(t_1,\ldots,t_n), \quad t_p = \frac{\Delta_p(g)}{\Delta_{p-1}(g)}\\
g_+ &= (u_{pq})_{1\leqslant p,q\leqslant n}, \quad u_{pq} = \frac{\Delta_{pq}(g)}{\Delta_p(g)}\\
g_- &= (v_{pq})_{1\leqslant p,q\leqslant n}, \quad v_{pq} = \frac{\Delta^{pq}(g)}{\Delta_p(g)}.
\end{aligned}
$$

Ce résultat reste vrai pour tout sous-groupe $G \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ pour lequel $G\cap T$ est un tore maximal de G et $G\cap B$ et $G\cap B^-$ sont des sous-groupes de Borel de G ; en particulier, ceci s'applique donc au groupe symplectique $\mathrm{Sp}_{2n}\subset \mathrm{GL}(2n,\mathbb{C})$.

Soit maintenant λ un poids de G ; on définit formellement l'action de G sur $\mathbb{C}[U^+]$ par

$$(g.f)(x) = \lambda((xg)_0)f((xg)_+), \qquad g\in G, f\in \mathbb{C}[U^+], x\in U^+. \tag{4.2}$$

Cette formule définit *génériquement* une action, c'est-à-dire que l'on a

$$((g_1g_2).f)(x) = (g_1.(g_2.f))(x)$$

dès que tous les termes ont un sens. En effet on vérifie d'abord les propriétés suivantes

Lemme 4.1.4. *Pour x et y génériques dans G on a*

$$
\begin{aligned}
(xy)_+ &= (x_+y)_+\\
x_0(x_+y)_0 &= (xy)_0.
\end{aligned}
$$

PREUVE. On a

$$xy = x_-x_0x_+y = x_-x_0(x_+y)_-(x_+y)_0(x_+y)_+$$

d'où la première affirmation. Ensuite on a par la dernière égalité

$$(xy)_-(xy)_0 = x_-x_0(x_+y)_-(x_+y)_0 = x_-\big(x_0(x_+y)_-x_0^{-1}\big)x_0(x_+y)_0$$

et comme $x_0(x_+y)_-x_0^{-1}\in U^-$ on obtient la deuxième affirmation. ■

À l'aide de ce lemme on vérifie directement :

$$
\begin{aligned}
(g_1.(g_2.f))(x) &= \lambda((xg_1)_0)(g_2.f)((xg_1)_+)\\
&= \lambda((xg_1)_0)\lambda\big(((xg_1)_+g_2)_0\big)f\big(((xg_1)_+g_2)_+\big)\\
&= \lambda((xg_1g_2)_0)f((xg_1g_2)_+)\\
&= (g_1g_2.f)(x),
\end{aligned}
$$

ces égalités étant vérifiées dès que tous les termes ont un sens.

Remarquons qu'une autre façon d'écrire la définition de l'action (4.2) est la suivante. Les applications rationnelles dominantes

$$
\begin{aligned}
\pi_+ : G \dashrightarrow U^+, &\quad g\mapsto g_+\\
\pi_0 : G \dashrightarrow T, &\quad g\mapsto g_0
\end{aligned}
$$

définissent des inclusions

$$\pi_+^* : \mathbb{C}[U^+] \hookrightarrow \mathbb{C}(G)$$
$$\pi_0^* : \mathbb{C}[T] \hookrightarrow \mathbb{C}(G).$$

Le groupe G agit par translation à droite sur son corps de fonctions rationnelles $\mathbb{C}(G)$:

$$(g \cdot f)(x) = f(xg), \qquad \text{pour } g \in G, f \in \mathbb{C}(G), \text{ et } x \in G \text{ générique.}$$

La formule (4.2) s'écrit alors

$$g_{\bullet}f = [g.(\pi_0^*\lambda\pi_+^*f)]|_{U^+}, \qquad g \in G, f \in \mathbb{C}[U^+]. \tag{4.3}$$

La transformée $g_{\bullet}f$ n'existe donc que si la fonction rationnelle $g.\pi_0^*\lambda\, g.\pi_+^*f \in \mathbb{C}(G)$ est régulière le long du fermé $U^+ \subset G$. Želobenko affirme alors que c'est le cas si λ est dominant et si l'on se restreint aux f appartenant à un certain sous-espace de $\mathbb{C}[U^+]$; avec l'action linéaire de G ainsi définie, ce sous-espace est alors isomorphe au G-module irréductible de plus haut poids λ. Pour définir ce sous-espace, remarquons d'abord que la formule (4.2) définit toujours une action de $B = TU^+$ dans $\mathbb{C}[U^+]$ qui s'écrit explicitement :

$$\forall u \in U^+, \forall f \in \mathbb{C}[U^+], \forall x \in U^+ \ : \qquad (u_{\bullet}f)(x) = f(xu),$$
$$\forall t \in T, \forall f \in \mathbb{C}[U^+], \forall x \in U^+ \ : \qquad (t_{\bullet}f)(x) = \lambda(t)f(t^{-1}xt),$$

où pour la deuxième formule on écrit $xt = t(t^{-1}xt)$ pour obtenir $(xt)_0 = t$ et $(xt)_+ = t^{-1}xt$. En particulier, on remarque que les seuls U^+-vecteurs propres dans $\mathbb{C}[U^+]$ sont les constantes et que la fonction constante 1 est un T-vecteur propre de poids λ. On en déduit que si $\mathbb{C}[U^+]$ contient un G-sous-module irréductible alors celui-ci est nécessairement de plus haut poids λ et coïncide avec le sous-espace de $\mathbb{C}[U^+]$ engendré par la G-orbite de la fonction constante 1 :

$$\langle\, (g.\pi_0^*\lambda)|_{U^+}\, ;\, g \in G\,\rangle = \langle\, x \mapsto \lambda((xg)_0)\, ;\, g \in G\,\rangle.$$

On est maintenant en mesure de donner un énoncé précis de la construction de Želobenko :

Proposition 4.1.5. *Si λ est un poids dominant alors les fonctions rationnelles $g.\pi_0^*\lambda$ sont régulières sur U^+ pour tout $g \in G$, la formule* (4.2) *définit une action de G dans le sous-espace de $\mathbb{C}[U^+]$ engendré par ces fonctions et cet espace est alors isomorphe au G-module irréductible de plus haut poids λ.*

Preuve. Par le théorème de Borel-Weil le G-module irréductible de plus haut poids λ se réalise comme l'espace des sections globales $H^0(G/B^-, L_\lambda)$ du fibré en droites L_λ associé au caractère λ de B^- ; par la construction du fibré L_λ cet espace de sections globales est isomorphe au sous-espace de fonctions régulières sur G

$$\{f \in \mathbb{C}[G] \mid f(gb) = \lambda(b)^{-1}f(g), \text{ pour } b \in B^-, \text{ et } g \in G\}$$

(cf. [Akh95, §4.2]) où G agit par translation à gauche

$$\forall g, x \in G \ : \qquad (g \cdot f)(x) = f(g^{-1}x).$$

Puisque dans la construction de Želobenko on a utilisé des actions par translation à droite on va conjuguer par l'automorphisme

$$\iota : \mathbb{C}[G] \longrightarrow \mathbb{C}[G], \quad \iota(f)(x) = f(x^{-1}), \qquad \text{pour } f \in \mathbb{C}[G], x \in G.$$

On obtient que le sous-espace

$$V_\lambda = \{f \in \mathbb{C}[G] \mid f(bg) = \lambda(b)f(g), \text{ pour } b \in B^-, \text{ et } g \in G\}$$

muni de l'action de G par translation à droite est isomorphe au G-module irréductible de plus haut poids λ. Nous allons montrer que l'espace de l'énoncé est précisément l'image de V_λ par le morphisme de restriction $\mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[U^+]$. D'abord, ce morphisme réalise un isomorphisme de V_λ sur son image $V_\lambda|_{U^+}$. En effet, la restriction

$$\mathbb{C}[G] \longrightarrow \mathbb{C}[U^-TU^+]$$

est injective puisque U^-TU^+ est un ouvert, et pour $f \in V_\lambda$ on a

$$f(g_-g_0g_+) = \lambda(g_-g_0)f(g_+) = \lambda(g_0)f(g_+)$$

ce qui montre que f est déterminé par sa restriction à U^+. Pour achever la preuve il suffit maintenant de montrer que cet isomorphisme est G-équivariant si l'on prend sur V_λ l'action de G par translation à droite et sur l'image de V_λ dans $\mathbb{C}[U^+]$ l'action (4.2) de Želobenko ; l'argument qu'on va donner montre en même temps que l'action (4.2) est bien définie sur $V_\lambda|_{U^+}$. Soit donc $f \in V_\lambda$ et $g \in G$. Pour $x \in G$ générique, plus précisément pour x tel que xg soit régulier on a

$$\begin{aligned}(g.f)(x) &= f(xg) = \lambda((xg)_0)f((xg)_+)\\ &= \pi_0^*\lambda(gx)\,\pi_+^*(f|_{U^+})(gx)\\ &= g.\big(\pi_0^*\lambda\,\pi_+^*(f|_{U^+})\big)(x)\end{aligned}$$

ce qui montre que la fonction rationnelle $g.(\pi_0^*\lambda\,\pi_+^*(f|_{U^+})) \in \mathbb{C}(G)$ coïncide avec $g.f$ et est donc régulière ; on peut donc former la transformée $g_\bullet(f|_{U^+})$ et on a comme voulu

$$g_\bullet(f|_{U^+}) = [g.(\pi_0^*\lambda\,\pi_+^*(f|_{U^+}))]|_{U^+} = (g.f)|_{U^+}.$$

Alors $V_\lambda|_{U^+}$ est un G-module irréductible de plus haut poids λ et par ce qui a été expliqué avant l'énoncé de la proposition il coïncide avec le sous-espace de $\mathbb{C}[U^+]$ engendré par les fonctions $x \mapsto \lambda((xg)_0)$, $g \in G$. ■

Exemple 4.1.6. Pour $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ ceci s'explicite de la façon suivante. Si ω_p est le p-ième poids fondamental

$$\omega_p(t) = t_1 \dots t_p, \qquad t = \mathrm{diag}(t_1, \dots, t_n) \in T$$

alors la fonction $\pi_0^*\omega_p$ est régulière et

$$\pi_0^*\omega_p(g) = \Delta_p(g)$$

est le p-ième mineur principal de $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Si λ est un poids dominant alors $\lambda = a_1\omega_1 + \dots + a_n\omega_n$ avec $a_1, \dots, a_n \geqslant 0$ et la proposition précédente affirme que le sous-espace de $\mathbb{C}[U^+]$ engendré par les fonctions polynomiales

$$x \mapsto \Delta_1(xg)^{a_1}\Delta_2(xg)^{a_2}\dots\Delta_n(xg)^{a_n}, \qquad g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$$

est le $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$-module irréductible de plus haut poids λ où l'action (4.2) s'exprime simplement par

$$g'.(\Delta_1(xg)^{a_1}\Delta_2(xg)^{a_2}\dots\Delta_n(xg)^{a_n}) = \Delta_1(xgg')^{a_1}\Delta_2(xgg')^{a_2}\dots\Delta_n(xgg')^{a_n}.$$

On remarque qu'en fait les fonctions ci-dessus, considérées cette fois comme fonctions sur G, engendrent précisément l'espace $V_\lambda \subset \mathbb{C}[G]$.

Enfin, un dernier résultat que Želobenko énonce pour les groupes classiques décrit le sous-espace $V_\lambda|_{U^+} \subset \mathbb{C}[U^+]$ par un système d'équations différentielles.

À l'action de U^+ sur son algèbre de fonctions régulières $\mathbb{C}[U^+]$ par translation à *gauche* correspond par différentiation une représentation de son algèbre de Lie $\mathfrak{u}^+$ dans $\mathbb{C}[U^+]$; comme U^+ agit dans $\mathbb{C}[U^+]$ par morphismes d'algèbres, $\mathfrak{u}^+$ agit dans $\mathbb{C}[U^+]$ par des dérivations. L'action de $\mathfrak{u}^+$ dans $\mathbb{C}[U^+]$ est donnée par la *convolution à gauche* (cf. [Hum75, 10.2]) :

$$(X * f)(x) = d_x f(d(r_x)(X)) \qquad X \in \mathfrak{u}^+,\ f \in \mathbb{C}[U^+],\ x \in U^+$$

où $r_x : U^+ \to U^+$, $y \mapsto yx$ est la translation à droite par x, autrement dit on dérive f le long du champ de vecteurs invariant à droite engendré par X. Pour la calculer explicitement on peut dériver l'action de U^+ comme si $\mathbb{C}[U^+]$ était de dimension finie puisque celui-ci est réunion de sous-espaces de dimension finie stables pour l'action de U^+ (cf. [Hum75, 8.6]).

Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les racines simples correspondant à notre choix de racines positives, et soit $D_1, \ldots, D_n$ les dérivations $\alpha_1 *, \ldots, \alpha_n *$. Soit $\omega_1, \ldots, \omega_n$ les poids fondamentaux qui correspondent aux racines simples $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Proposition 4.1.7. *Soit λ un poids dominant, $\lambda = a_1\omega_1 + \cdots + a_n\omega_n$ avec $a_1, \ldots, a_n \geqslant 0$. L'espace $V_\lambda|_{U^+} \subset \mathbb{C}[U^+]$ qui avec l'action (4.2) est le G-module irréductible de plus haut poids λ est précisément l'ensemble des polynômes $f \in \mathbb{C}[U^+]$ qui vérifient les équations différentielles*

$$\begin{aligned} &D_1^{a_1+1} f = 0 \\ &D_2^{a_2+1} f = 0 \\ &\cdots \\ &D_n^{a_n+1} f = 0. \end{aligned}$$

Pour une démonstration de cette proposition dans le cas $G = \mathrm{Sp}_{2n}$ – qui est le seul qui nous intéresse – cf. [Žel62, §7, Théorème 3].

4.1.2 Retour sur la construction de Shtepin

Nous allons maintenant décrire brièvement la construction de la filtration de Shtepin dans un Sp_{2n+2}-module irréductible. Nous fixons d'abord quelques notations : $\tilde{E} = \mathbb{C}^{2n+2}$ est un espace vectoriel complexe muni d'une forme symplectique $\tilde{\omega} \in \Lambda^2 \tilde{E}^*$; on fixe également une base symplectique $\{e_0, \ldots, e_n, e_{\bar{n}}, \ldots, e_{\bar{0}}\}$ de sorte que

$$\tilde{\omega} = \sum_{i=0}^{n} (e_i^* \otimes e_{\bar{\imath}}^* - e_{\bar{\imath}}^* \otimes e_i^*).$$

Shtepin introduit la définition suivante :

Définition 4.1.8. Le *groupe symplectique impair intermédiaire*[3] est le sous-groupe de Sp_{2n+2} qui fixe le vecteur e_n :

$$\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1} = \{g \in \mathrm{Sp}_{2n+2} \mid g(e_n) = e_n\}.$$

[3] Shtepin l'appelle simplement *groupe symplectique impair* mais nous voulons le distinguer du groupe Sp_{2n+1} introduit plus tôt.

À une conjugaison par un élément de Sp_{2n+2} qui échange e_0 et e_n près, ce groupe est le même que le groupe symplectique impair intermédiaire introduit au chapitre premier (cf. la définition 1.1.15) ; c'est ce qui justifie l'utilisation de la même notation pour les deux groupes. Pour la suite nous allons garder cette définition – qui a pourtant le désavantage de rendre plus compliquées les représentations matricielles des éléments de $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$ – pour des raisons qui vont paraître plus claires ci-dessous.

Il convient dans la suite de considérer également le sous-groupe parabolique

$$P = \{g \in \mathrm{Sp}_{2n+2} \mid g(\mathbb{C}e_n) = \mathbb{C}e_n\} \ ;$$

soit $E = (\mathbb{C}e_n)^\perp = \mathbb{C}^{2n+1}$ et $\omega = \tilde{\omega}|_E$, alors ω est une forme de rang maximal sur E de noyau $\mathbb{C}e_n$ et le morphisme de restriction

$$P \longrightarrow \mathrm{Sp}_{2n+1}, \qquad g \mapsto g|_E$$

est surjectif. Ceci découle, après une conjugaison, de la proposition 1.1.12. Le groupe symplectique impair intermédiaire $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$ est un sous-groupe de codimension 1 dans P et l'image de $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$ par le morphisme de restriction ci-dessus est le sous-groupe de codimension 1 $\mathrm{SSp}_{2n+1} \subset \mathrm{Sp}_{2n+1}$ des éléments de déterminant 1.

Le groupe symplectique Sp_{2n} est plongé dans Sp_{2n+2} comme le sous-groupe

$$\mathrm{Sp}_{2n} = \{g \in \mathrm{Sp}_{2n+2} \mid g(e_n) = e_n,\ g(e_{\bar{n}}) = e_{\bar{n}}\} \ ; \tag{4.4}$$

on a bien $\mathrm{Sp}_{2n} \subset \widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1} \subset \mathrm{Sp}_{2n+2}$.

Dans Sp_{2n+2} on fixe le sous-groupe de Borel B_{2n+2} qui préserve le drapeau standard $\langle e_0\rangle \subset \langle e_0, e_1\rangle \subset \cdots \subset \langle e_0, \ldots, e_n, e_{\bar{n}}, \ldots, e_{\bar{1}}\rangle \subset \tilde{E}$; les racines positives de Sp_{2n+2} seront les racines de B_{2n+2} et la notion de vecteur de plus haut poids sera donc définie par rapport à ce sous-groupe de Borel.

Remarque 4.1.9. Shtepin réalise sa construction dans cette configuration, et ce choix de la notion de vecteur de plus haut poids est particulièrement important (cf. par exemple la proposition 4.1.18 ci-dessous, qui en dépend). Si l'on voulait donc utiliser le groupe symplectique impair intermédiaire avec la notation du premier chapitre, on devrait choisir comme sous-groupe de Borel un conjugué $gB_{2n+2}g^{-1}$ par un élément $g \in \mathrm{Sp}_{2n+2}$ qui échange e_0 et e_n. Or il n'y a pas vraiment de choix pour g, autre que $g = 1$, qui mène à une notion de vecteur de plus haut poids suffisamment simple à utiliser. Par exemple, il semble que le choix pour $g \neq 1$ qui aboutit au résultat le plus maniable est $g = n \ldots 21 \in W(\mathrm{Sp}_{2n+2})$ – l'élément du groupe de Weyl qui correspond à la permutation signée $n \ldots 21$; alors $gB_{2n+2}g^{-1}$ est le sous-groupe des matrices de Sp_{2n+2} qui sont de la forme

$$\begin{pmatrix} a & * \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

avec a et d triangulaires inférieures de taille $(n+1) \times (n+1)$. Mais il nous semble qu'il est préférable de travailler avec la notion usuelle de plus haut poids, ce qui justifie pourquoi on a adopté la définition de Shtepin 4.1.8 plutôt que celle du premier chapitre.

Notons que le sous-groupe $B_{2n} = B_{2n+2} \cap \mathrm{Sp}_{2n}$ est un sous-groupe de Borel de Sp_{2n}. Désignons également par T_{2n+2} le tore maximal de Sp_{2n+2} formé par les matrices diagonales ; alors $T_{2n} = T_{2n+2} \cap \mathrm{Sp}_{2n}$ est un tore maximal de Sp_{2n}. Le sous-groupe unipotent maximal de

B_{2n+2} est le sous-groupe U^+_{2n+2} des matrices (z_{ij}) de Sp_{2n+2} qui sont triangulaires supérieures et dont les coefficients situés sur la diagonale sont égaux à 1 ; alors $U^+_{2n} = U^+_{2n+2} \cap \mathrm{Sp}_{2n}$ est le sous-groupe unipotent maximal de B_{2n}. Soient de même U^-_{2n+2} et U^-_{2n} les sous-groupes unipotents opposés à U^+_{2n+2} et U^+_{2n}.

On peut montrer (et on trouve une démonstration dans [Žel62, §7.2]) que U^+_{2n+2} est isomorphe à un espace affine et que, plus précisément, on peut prendre comme coordonnées les coefficients z_{ij} non déterminés situés au-dessus ou sur la deuxième diagonale de la matrice (z_{ij}). Autrement dit, on a

$$\mathbb{C}[U^+_{2n+2}] = \mathbb{C}[z_{ij};\, i < j \leqslant \bar{\imath}]$$

et par la construction de Želobenko, tout Sp_{2n+2}-module irréductible se réalise dans cette algèbre de polynômes.

4.1.10. Il convient de considérer en parallèle les algèbres de Lie correspondantes. Dans l'algèbre de Lie symplectique $\mathfrak{sp}_{2n+2}$ soit $\mathfrak{b}_{2n+2}$ l'algèbre de Lie du sous-groupe de Borel B_{2n+2} et $\mathfrak{t}_{2n+2}$ l'algèbre de Lie du tore maximal T_{2n+2}. Avec les notations du n$^\text{o}$ A.1.5, $\mathfrak{sp}_{2n+2}$ admet une base, en tant que sous-espace de l'algèbre de matrices $\mathfrak{sl}_{2n+2}$, donnée par les matrices X_{ij}, $0 \leqslant i, j \leqslant n$, $X_{i\bar{\jmath}}$, $X_{\bar{\imath}j}$, $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$. Alors les éléments X_{ii}, $0 \leqslant i \leqslant n$, forment une base de la sous-algèbre $\mathfrak{t}_{2n+2}$ et les éléments X_{ij}, $i \neq j$, $X_{i\bar{\jmath}}$, respectivement $X_{\bar{\imath}\bar{\jmath}}$, $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, engendrent les espaces propres qui correspondent aux racines $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, $\varepsilon_i + \varepsilon_j$, respectivement $-\varepsilon_i - \varepsilon_j$.

L'algèbre de Lie du groupe symplectique impair intermédiaire est la sous-algèbre de $\mathfrak{sp}_{2n+2}$

$$\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1} = \{X \in \mathfrak{sp}_{2n+2} \mid Xe_n = 0\},$$

l'algèbre de Lie du sous-groupe parabolique P est

$$\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{sp}_{2n+2} \mid X(\mathbb{C}e_n) \subset \mathbb{C}e_n\},$$

et enfin l'algèbre de Lie du sous-groupe $\mathrm{Sp}_{2n} \subset \mathrm{Sp}_{2n+2}$ est

$$\mathfrak{sp}_{2n} = \{X \in \mathfrak{sp}_{2n+2} \mid Xe_n = 0,\, Xe_{\bar{n}} = 0\}.$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}_{2n+1}$ est donc formée par les matrices de $\mathfrak{sp}_{2n+2}$ qui ont la colonne n et la ligne $\bar{n}$ nulles ; l'algèbre $\mathfrak{sp}_{2n}$ est formée par les matrices de $\mathfrak{sp}_{2n+2}$ qui ont les lignes et les colonnes n et $\bar{n}$ nulles. On a donc les décompositions suivantes :

$$\mathfrak{sp}_{2n+2} = \widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1} \oplus \bigoplus_{0 \leqslant i \leqslant n} \mathbb{C}X_{in} \oplus \bigoplus_{0 \leqslant i \leqslant n} \mathbb{C}X_{\bar{n}i} \tag{4.5}$$

$$\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1} = \mathfrak{sp}_{2n} \oplus \bigoplus_{0 \leqslant i \leqslant n} \mathbb{C}X_{i\bar{n}} \oplus \bigoplus_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \mathbb{C}X_{ni}$$

De même, on a

$$\mathfrak{p} = \widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1} \oplus \mathbb{C}X_{nn}. \tag{4.6}$$

Soit $\mathfrak{b}_{2n}$ l'algèbre de Lie du sous-groupe de Borel B_{2n} ; alors $\mathfrak{b}_{2n} = \mathfrak{b}_{2n+2} \cap \mathfrak{sp}_{2n}$. Notons également $\mathfrak{b}_{2n+1} = \mathfrak{b}_{2n+2} \cap \widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1}$, de sorte que l'on a

$$\mathfrak{b}_{2n} \subset \mathfrak{b}_{2n+1} \subset \mathfrak{b}_{2n+2}.$$

Soit de même $\mathfrak{t}_{2n}$ l'algèbre de Lie du tore T_{2n} ; alors $\mathfrak{t}_{2n+2} \subset \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{t}_{2n+2} \cap \widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1} = \mathfrak{t}_{2n}$. Enfin, soient $\mathfrak{u}^+_{2n+2}$ et $\mathfrak{u}^+_{2n}$ les algèbres de Lie des groupes unipotents U^+_{2n+2} et U^+_{2n}, respectivement

$\mathfrak{u}_{2n+2}^-$ et $\mathfrak{u}_{2n}^-$ leurs algèbres opposées ; alors $\mathfrak{u}_{2n}^+ = \mathfrak{u}_{2n+2}^+ \cap \mathfrak{sp}_{2n}$ et $\mathfrak{u}_{2n}^- = \mathfrak{u}_{2n+2}^- \cap \mathfrak{sp}_{2n}$. Notons aussi $\mathfrak{u}_{2n+1}^+ = \mathfrak{u}_{2n+2}^+ \cap \widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1}$ respectivement $\mathfrak{u}_{2n+1}^- = \mathfrak{u}_{2n+2}^- \cap \widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1}$.

La décomposition de Cartan de $\mathfrak{sp}_{2n+2}$

$$\mathfrak{sp}_{2n+2} = \mathfrak{u}_{2n+2}^- \oplus \mathfrak{t}_{2n+2} \oplus \mathfrak{u}_{2n+2}^+$$

induit des décompositions analogues pour les sous-algèbres $\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1}$ et $\mathfrak{p}$:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1} &= \mathfrak{u}_{2n+1}^- \oplus \mathfrak{t}_{2n} \oplus \mathfrak{u}_{2n+1}^+ \\ \mathfrak{p} &= \mathfrak{u}_{2n+1}^- \oplus \mathfrak{t}_{2n+2} \oplus \mathfrak{u}_{2n+1}^+. \end{aligned}$$

Puisqu'on a les décompositions

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}_{2n+1}^+ &= \mathfrak{u}_{2n}^+ \oplus \bigoplus_{0 \leqslant i \leqslant n} \mathbb{C} X_{i\bar{n}} \\ \mathfrak{u}_{2n+1}^- &= \mathfrak{u}_{2n}^- \oplus \bigoplus_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \mathbb{C} X_{ni} \end{aligned}$$

il résulte que les racines de $\mathfrak{p}$ (les poids non nuls de $\mathfrak{t}_{2n+2}$ dans $\mathfrak{p}$) sont les racines de $\mathfrak{sp}_{2n}$ auxquelles on ajoute les racines positives $\varepsilon_0 + \varepsilon_n, \dots, \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n, 2\varepsilon_n$ et les racines négatives $\varepsilon_n - \varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}$. En restreignant ces racines à $\mathfrak{t}_{2n}$ il s'ensuit que les racines de $\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1}$ sont les racines de $\mathfrak{sp}_{2n}$ auxquelles on ajoute les racines $\pm\varepsilon_i$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j, &\quad 0 \leqslant i < j \leqslant n-1 \\ \pm 2\varepsilon_i,\ \pm\varepsilon_i, &\quad 0 \leqslant i \leqslant n-1. \end{aligned}$$

Le système de racines de $\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1}$ est donc le système de type BC_n. En particulier, on remarque que si α est une racine de $\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1}$ alors $-\alpha$ en est une aussi. Notons également que $X_{n\bar{n}} \in \mathfrak{c}_{\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1}}(\mathfrak{t}_{2n})$, et même plus, $X_{n\bar{n}} \in \mathfrak{z}(\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1})$ est dans le centre de $\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1}$.

Notation 4.1.11. Si α est une racine positive de $\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1}$, on note X_α un générateur de l'espace propre qui correspond à α et Y_α un générateur de l'espace propre qui correspond à $-\alpha$.

Ainsi on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}_{2n+1}^+ &= \mathbb{C} X_{n\bar{n}} \oplus \bigoplus_{\alpha} \mathbb{C} X_\alpha \\ \mathfrak{u}_{2n+1}^- &= \bigoplus_{\alpha} \mathbb{C} Y_\alpha \end{aligned}$$

où α parcourt les racines positives de $\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1}$.

4.1.12. Rappelons que la motivation initiale de Shtepin est de séparer les composantes multiples dans la restriction $\mathrm{Sp}_{2n+2} \downarrow \mathrm{Sp}_{2n}$; considérons donc la définition suivante :

Définition 4.1.13. Soit V une représentation de Sp_{2n+2}. Un vecteur $v \in V$ est un *vecteur semi-maximal* si c'est un vecteur propre pour T_{2n+2} et s'il est fixé par U_{2n}^+, autrement dit si c'est un vecteur maximal pour Sp_{2n}. Le sous-espace engendré par les vecteurs semi-maximaux est noté V^+.

Le lien entre cette notion et la restriction $\mathrm{Sp}_{2n+2} \downarrow \mathrm{Sp}_{2n}$ est explicité par la proposition suivante :

Proposition 4.1.14. *Soit V un Sp_{2n+2}-module. Le vecteur de plus haut poids d'un Sp_{2n}-sous-module irréductible de V est dans V^+. Plus précisément, si*

$$V = \bigoplus_{i=1}^{s} V_i$$

est une décomposition de V en Sp_{2n}-composantes irréductibles, alors les vecteurs de plus haut poids des V_i forment une base de V^+ ; réciproquement si $\{v_1, \ldots, v_s\}$ est une base de V^+ formée par des vecteurs semi-maximaux, alors il existe une décomposition

$$V = \bigoplus_{i=1}^{s} V_i$$

de V en Sp_{2n}-sous-modules irréductibles telle que v_i soit le vecteur de plus haut poids de V_i (et alors V_i est simplement le Sp_{2n}-sous-module de V engendré par v_i). En fait, V^+ coïncide avec le sous-espace $V^{U_{2n}^+}$ des invariants de U_{2n}^+ dans V.

Preuve. On commence par la dernière affirmation. Par définition $V^+ \subset V^{U_{2n}^+}$; or T_{2n+2} normalise U_{2n}^+, alors $V^{U_{2n}^+}$ est T_{2n+2}-stable et donc engendré par des T_{2n+2}-vecteurs propres, autrement dit $V^+ = V^{U_{2n}^+}$. On en déduit immédiatement la première affirmation. Les autres affirmations découlent du fait suivant : si

$$V = \bigoplus_{i=1}^{s} V_i$$

est une décomposition de V en Sp_{2n}-composantes irréductibles alors

$$V^{U_{2n}^+} = \bigoplus_{i=1}^{s} V_i^{U_{2n}^+},$$

or $V_i^{U_{2n}^+}$ est la droite engendrée par le vecteur de plus haut poids de V_i. ∎

En termes des algèbres de Lie, un vecteur dans un Sp_{2n+2}-module est semi-maximal si c'est un vecteur propre pour $\mathfrak{t}_{2n+2}$ et s'il est annulé par $\mathfrak{u}_{2n}^+$; de même, l'espace V^+ coïncide avec $V^{\mathfrak{u}_{2n}^+}$ l'espace des invariants de $\mathfrak{u}_{2n}^+$ dans V.

Pour définir sa filtration dans un Sp_{2n+2}-module irréductible, Shtepin utilise certains vecteurs semi-maximaux de ce Sp_{2n+2}-module qui sont ceux qui vérifient la propriété supplémentaire de la définition suivante :

Définition 4.1.15. Soit V un Sp_{2n+2}-module. Un *vecteur quasimaximal* de V est un vecteur semi-maximal qui en outre est annulé par les éléments $X_{0n}, X_{1n}, \ldots, X_{n-1\,n}$ de $\mathfrak{u}_{2n+2}^+$. Le sous-espace engendré par les vecteurs quasimaximaux est noté V^{++}.

Autrement dit, eu égard à la décomposition (4.5), un vecteur quasimaximal est un vecteur semi-maximal qui est annulé par les racines positives de $\mathfrak{sp}_{2n+2}$ qui ne sont pas racines de $\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1}$. Ce qui manque donc à un vecteur quasimaximal pour être un vecteur maximal est d'être annulé par les racines positives de $\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1}$ qui ne sont pas racines de $\mathfrak{sp}_{2n}$

$$X_{0\bar{n}}, X_{1\bar{n}}, \ldots, X_{n\bar{n}}.$$

On remarque que, puisque les éléments de la définition précédente sont les générateurs des espaces propres correspondant aux racines $\varepsilon_0 - \varepsilon_n, \varepsilon_1 - \varepsilon_n, \ldots, \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n$, et comme un vecteur semi-maximal est déjà annulé par les racines positives de $\mathfrak{sp}_{2n}$, il suffit qu'un vecteur semi-maximal soit annulé par $X_{n-1\,n}$ pour qu'il soit quasimaximal. De même, il suffit qu'un vecteur quasimaximal soit annulé par $X_{n\bar{n}}$ pour qu'il soit un vecteur maximal (c'est-à-dire annulé par $\mathfrak{u}^+_{2n+2}$). Notons aussi que, puisque $X_{n-1\,n}$ est un $\mathfrak{t}_{2n+2}$-vecteur propre, le sous-espace $V^{\mathfrak{u}^+_{2n}} \cap V^{X_{n-1\,n}}$ des vecteurs de $V^{\mathfrak{u}^+_{2n}}$ annulés par $X_{n-1\,n}$ est $\mathfrak{t}_{2n+2}$-stable donc il est engendré par des $\mathfrak{t}_{2n+2}$-vecteurs propres et donc il coïncide avec V^{++}.

Avec ces ingrédients, Shtepin définit sa filtration dans un $\mathfrak{sp}_{2n+2}$-module irréductible V de la façon suivante : il considère une base $\{v_1, \ldots, v_p\}$ de vecteurs quasimaximaux de V^{++} qu'il ordonne de telle façon que, pour chaque $1 \leqslant i \leqslant p-1$, $\mathfrak{u}^+_{2n+1} v_{i+1}$ soit inclus dans le $\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1}$-sous-module engendré par $v_1, \ldots, v_i$ dans V ; ceci est toujours possible, comme il résulte de la réalisation explicite de V par la construction de Želobenko.

Définition 4.1.16. Pour chaque $1 \leqslant i \leqslant p$, on désigne par V_i le $\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1}$-sous-module engendré par $v_1, \ldots, v_i$. On obtient ainsi la *filtration de Shtepin* de V :

$$(0) = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_p \subset V.$$

Les vecteurs quasimaximaux $v_1, \ldots, v_p$ ont des poids distincts : si le plus haut poids de V est $\lambda = (\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{n+1})$ alors les poids des vecteurs quasimaximaux de V sont les $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_{n+1})$ tels que $\mu \to \lambda$ c'est-à-dire

$$\lambda_1 \geqslant \mu_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_n \geqslant \lambda_{n+1} \geqslant \mu_{n+1}. \tag{4.7}$$

Shtepin démontre ensuite que la filtration $V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_p \subset V$ sépare les Sp_{2n}-composantes de V dans le sens expliqué au début de la section 4.1, c'est-à-dire que les quotients V_{i+1}/V_i sont deux à deux non isomorphes comme $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$-modules et ils sont sans composantes multiples comme Sp_{2n}-modules. Pour obtenir ce résultat il calcule explicitement la décomposition en Sp_{2n}-composantes irréductibles des quotients V_{i+1}/V_i : si le poids de v_{i+1} est $\mu = (\mu_1 \geqslant \cdots \geqslant \mu_{n+1})$ (le « plus haut poids » de V_{i+1}/V_i – voir ci-dessous) alors

$$V_{i+1}/V_i = \bigoplus_{\nu \longrightarrow \mu} V''_\nu \tag{4.8}$$

où V''_ν est le Sp_{2n}-module irréductible de plus haut poids $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ et $\nu \to \mu$ signifie

$$\mu_1 \geqslant \nu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_n \geqslant \nu_n \geqslant \mu_{n+1}.$$

Ainsi Shtepin retrouve la règle de branchement

$$V_\lambda = \bigoplus_{\nu \longrightarrow \mu \longrightarrow \lambda} V''_\nu$$

de Želobenko (cf. la formule (4.1)) en y apportant de plus l'interprétation des poids intermédiaires μ qui résulte des formules précédentes.

On remarque que, par la construction, le quotient V_{i+1}/V_i est engendré comme $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$-module par l'image $\bar{v}_{i+1}$ de v_{i+1} dans V_{i+1}/V_i. De plus, par le choix de l'ordre des éléments $v_1, \ldots, v_p$, le vecteur $\bar{v}_{i+1}$ est annulé par $\mathfrak{u}^+_{2n+1}$; c'est donc un *vecteur maximal* pour $\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1}$. Ainsi le quotient V_{i+1}/V_i est un $\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1}$-module engendré par un vecteur maximal, c'est donc une sorte de « module cyclique standard » dans la terminologie de Humphreys [Hum78], ou encore un quotient de dimension finie d'un « $\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1}$-module de Verma » en des termes plus proches de Dixmier [Dix74]. Et en effet, comme le montre la proposition qui suit, un tel $\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1}$-module a bon nombre de propriétés similaires aux propriétés d'un module engendré par un vecteur maximal pour une algèbre de Lie semi-simple :

Proposition 4.1.17. *Soit V un $\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1}$-module engendré par un vecteur maximal v (c'est-à-dire par un vecteur annulé par $\mathfrak{u}^+_{2n+1}$). Soit $\lambda \in \mathfrak{t}_{2n+1}$ le poids de v ; soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ les racines positives de $\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1}$. Alors :*

1. *V est engendré par les éléments $Y^{a_1}_{\alpha_1} \ldots Y^{a_s}_{\alpha_s} v$, $a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{N}$;*
2. *les poids de V sont de la forme $\lambda - \sum a_i\alpha_i$, $a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{N}$, donc λ est le plus haut poids de V ;*
3. $\dim V_\lambda = 1$ *;*
4. *tout endomorphisme de $\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1}$-module de V est scalaire, donc en particulier V est indécomposable ;*
5. *V a un plus petit poids qui est $w_0(\lambda)$ où $w_0 \in W(\mathrm{Sp}_{2n})$ est l'élément de plus grande longueur $\bar{0}\bar{1}\ldots\overline{n-1}n$.*
6. *V a un unique sous-module propre maximal.*

PREUVE. La preuve consiste essentiellement à remarquer que la preuve du résultat similaire pour une algèbre de Lie semi-simple s'applique également à $\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1}$ avec sa « décomposition de Cartan » $\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1} = \mathfrak{u}^-_{2n+1} \oplus \mathfrak{t}_{2n} \oplus \mathfrak{u}^+_{2n+1}$.

En effet soit $U(\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1})$ l'algèbre enveloppante de $\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1}$; alors V est un $U(\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1})$-module à gauche engendré par v, c'est-à-dire $V = U(\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1})v$. Par le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt on a $U(\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1}) = U(\mathfrak{u}^-_{2n+1})U(\mathfrak{b}_{2n+1})$, dans ce sens que tout élément X de $U(\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1})$ s'écrit comme un produit $X = X_1X_2$, $X_1 \in U(\mathfrak{u}^-_{2n+1})$, $X_2 \in U(\mathfrak{b}_{2n+1})$, donc comme v est un $\mathfrak{b}_{2n+1}$-vecteur propre

$$V = U(\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1})v = U(\mathfrak{u}^-_{2n+1})U(\mathfrak{b}_{2n+1})v = U(\mathfrak{u}^-_{2n+1})v.$$

Une base de $\mathfrak{u}^-_{2n+1}$ est $\{Y_{\alpha_1}, \ldots, Y_{\alpha_s}\}$ donc, toujours par le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, les monômes dans les variables $Y_{\alpha_1}, \ldots, Y_{\alpha_s}$ prises dans cet ordre forment une base de $U(\mathfrak{u}^-_{2n+1})$; on obtient alors 1).

Pour 2) il suffit de remarquer que le poids de l'élément $Y^{a_1}_{\alpha_1} \ldots Y^{a_s}_{\alpha_s} v$ est $\lambda - \sum_{i=1}^s a_i\alpha_i$. Le seul élément de la forme $Y^{a_1}_{\alpha_1} \ldots Y^{a_s}_{\alpha_s} v$ de poids λ est v donc on obtient 3). Pour 4) on remarque que tout endomorphisme φ de $\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1}$-module de V préserve V_λ donc agit sur V_λ comme l'homothétie de rapport α, $\alpha \in \mathbb{C}$; il s'ensuit que φ agit comme $\alpha\mathrm{Id}$ sur le $\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1}$-sous-module engendré par v c'est-à-dire sur V. On en déduit que V est indécomposable, sinon la projection sur un facteur direct serait un endomorphisme de V qui n'est pas une homothétie.

Pour 5) on remarque que l'élément de plus grande longueur $w_0 = \bar{0}\bar{1}\ldots\overline{n-1}n$ de $W(\mathrm{Sp}_{2n})$ envoie les racines positives de $\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1}$ sur les racines négatives de $\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1}$; plus précisément, w_0 agit comme $-\mathrm{Id}$ sur le réseau des poids de $\mathfrak{t}_{2n}$. Si μ est un poids de V alors $w_0(\mu)$ en est un aussi et en vertu de l'affirmation 2) on peut écrire $w_0(\mu) = \lambda - \sum a_i\alpha_i$, avec $a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{N}$ d'où

$$\mu = w_0(\lambda) - \sum a_i w_0(\alpha_i) = w_0(\lambda) + \sum a_i\alpha_i$$

donc μ est plus grand que $w_0(\lambda)$.

Enfin pour 6) on remarque qu'un sous-module propre de V ne contient pas le vecteur maximal v puisque celui-ci engendre V ; tout sous-module propre est donc inclus dans le sous-espace $\sum_{\mu \neq \lambda} V_\mu \subset V$, et donc la somme de tous les sous-modules propres aussi. Cette somme est alors l'unique sous-module propre maximal de V. ■

Pour le quotient V_{i+1}/V_i la dernière affirmation de la proposition précédente peut être rendue plus précise comme suit. Le quotient de V_{i+1}/V_i par son sous-module maximal est un $\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1}$-module irréductible, donc un $\mathfrak{sp}_{2n}$-module irréductible. Or par la règle de branchement (4.8) on sait que si μ est le plus haut poids de V_{i+1}/V_i alors il existe une unique Sp_{2n}-composante de plus haut poids $\mu|_{\mathfrak{t}_{2n}}$. Il résulte que le sous-module maximal de V_{i+1}/V_i est la somme des autres composantes :

$$\bigoplus_{\substack{\nu \longrightarrow \mu \\ \nu \neq \mu|_{\mathfrak{t}_{2n}}}} V''_\nu.$$

Remarquons que, puisque le vecteur maximal $\bar{v}_{i+1}$ du quotient V_{i+1}/V_i est aussi un vecteur quasimaximal, ce vecteur $\bar{v}_{i+1}$ est annulé par $\mathfrak{u}^+_{2n+2}$. Cela nous laisse penser que le quotient V_{i+1}/V_i pourrait être réalisé à l'intérieur d'un $\mathfrak{sp}_{2n+2}$-module irréductible où $\bar{v}_{i+1}$ serait le vecteur de plus haut poids. Et en effet, Shtepin prouve le résultat suivant qui montre que le $\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1}$-module V_{i+1}/V_i est moins dépendant de la construction que l'on n'aurait pensé.

Proposition 4.1.18. *Soit $\lambda \in \mathfrak{t}^*_{2n+2}$ le poids par rapport à $\mathfrak{t}_{2n+2}$ du vecteur maximal $\bar{v}_{i+1}$ de V_{i+1}/V_i. Alors V_{i+1}/V_i est isomorphe au $\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1}$-module engendré par le vecteur de plus haut poids dans un $\mathfrak{sp}_{2n+2}$-module irréductible de plus haut poids λ (où, comme partout dans cette partie, on entend par vecteur de plus haut poids dans un $\mathfrak{sp}_{2n+2}$-module un vecteur propre de $\mathfrak{b}_{2n+2}$).*

Notation 4.1.19. On note V'_λ un $\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1}$-module de plus haut poids λ comme dans la proposition précédente.

4.2 Le théorème de Borel-Weil

Soit $B^-_{2n+2} \subset \mathrm{Sp}_{2n+2}$ le sous-groupe de Borel opposé à B_{2n+2}, soit λ un poids dominant de Sp_{2n+2} et soit L_λ le fibré en droites sur la variété de drapeaux symplectique $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$ associé au caractère $\lambda \in X(B^-_{2n+2})$ autrement dit le fibré dont la fibre au point base

$$\langle e_{\bar{0}} \rangle \subset \langle e_{\bar{0}}, e_{\bar{1}} \rangle \subset \cdots \subset \langle e_{\bar{0}}, \ldots, e_1 \rangle \subset \mathbb{C}^{2n+2} = \tilde{E}$$

fixé par B^-_{2n+2} est le B^-_{2n+2}-module de dimension 1 de poids λ.

Par le théorème de Borel-Weil on sait que $H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+2), L_\lambda)$ est le Sp_{2n+2}-module irréductible de plus haut poids λ. Nous allons maintenant calculer l'espace des sections globales de la restriction de L_λ à la variété de drapeaux symplectique impaire $\mathbb{F}_\omega(2n+1) \subset \mathbb{F}_\omega(2n+2)$.

Comme expliqué dans la remarque 3.2.2, la sous-variété $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ est le lieu d'annulation d'une section générique du dual T^*_{n+1} du $(n+1)$-ième fibré tautologique sur la variété $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$; nous allons nous servir du complexe de Koszul associé à cette section pour produire une résolution pour la restriction $L_\lambda|_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)}$ que l'on prouvera être acyclique. Ceci nous fournira une résolution $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$-équivariante du $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$-module que l'on cherche à calculer

$$H^0\big(\mathbb{F}_\omega(2n+1), L_\lambda|_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)}\big).$$

Nous commençons par signaler un changement de notation par rapport au chapitre 3 : pour être en accord avec la définition 4.1.8 du groupe symplectique impair intermédiaire, nous plongeons la variété de drapeaux symplectiques impaire $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ dans $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$ comme la sous-variété

$$\mathbb{F}_\omega(2n+1) = \{V_\bullet = (V_1 \subset \cdots \subset V_{n+1}) \in \mathbb{F}_\omega(2n+2) \mid V_{n+1} \subset e_n^\perp\}.$$

Cette sous-variété est donc le lieu d'annulation de la section

$$e_{\bar{n}}^* \in \tilde{E}^* = H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+2), T_{n+1}^*)$$

qui correspond à e_n si l'on identifie $\tilde{E}$ et $\tilde{E}^*$ via la forme $\tilde{\omega}$.

Le complexe de Koszul associé à la section $e_{\bar{n}}^*$ est le complexe

$$0 \longrightarrow \Lambda^{n+1}T_{n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Lambda^2 T_{n+1} \longrightarrow T_{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{F}_\omega(2n+2)} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)} \longrightarrow 0, \tag{4.9}$$

on tensorise ce complexe par L_λ et on obtient le complexe

$$0 \longrightarrow \Lambda^{n+1}T_{n+1} \otimes L_\lambda \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Lambda^2 T_{n+1} \otimes L_\lambda \longrightarrow T_{n+1} \otimes L_\lambda \longrightarrow L_\lambda \longrightarrow L_\lambda|_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)} \longrightarrow 0 \tag{4.10}$$

qui est une résolution par des fibrés vectoriels de la restriction $L_\lambda|_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)}$.

Dans la suite on va utiliser la version partielle du théorème de Bott suivante :

Théorème. *Avec les notations ci-dessus, si λ est un poids tel que $\lambda + \rho$ est singulier, alors $H^q(\mathbb{F}_\omega(2n+2), L_\lambda) = 0$ pour tout q.*

Comme les racines de Sp_{2n+2} sont $\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$, $0 \leqslant i, j \leqslant n$, un poids μ de Sp_{2n+2} est singulier si et seulement si μ a une part nulle ou deux parts égales en valeur absolue.

Proposition 4.2.1. *On a $H^q(\mathbb{F}_\omega(2n+2), \Lambda^k T_{n+1} \otimes L_\lambda) = 0$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant n+1$ et tout $q > 0$.*

Nous allons nous servir dans la démonstration de cette proposition du lemme suivant :

Lemme 4.2.2. *Soit $\mathscr{F}$ un faisceau sur une variété X muni d'une filtration de longueur finie $0 = \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_1 \subset \cdots \subset \mathscr{F}_m = \mathscr{F}$. Si pour un $q \geqslant 0$ on a $H^q(X, \mathscr{F}_{i+1}/\mathscr{F}_i) = 0$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant m$, alors $H^q(X, \mathscr{F}) = 0$.*

La preuve de ce lemme est une manipulation standard des suites exactes de cohomologie associées aux suites $0 \to \mathscr{F}_i \to \mathscr{F}_{i+1} \to \mathscr{F}_{i+1}/\mathscr{F}_i \to 0$ et on l'omet.

PREUVE DE LA PROPOSITION 4.2.1. Le fibré $\Lambda^k T_{n+1} \otimes L_\lambda$ est muni de la filtration

$$0 = \Lambda^k T_{k-1} \otimes L_\lambda \subset \Lambda^k T_k \otimes L_\lambda \subset \cdots \subset \Lambda^k T_n \otimes L_\lambda \subset \Lambda^k T_{n+1} \otimes L_\lambda. \tag{4.11}$$

On a les suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow \Lambda^k T_i \longrightarrow \Lambda^k T_{i+1} \longrightarrow \Lambda^{k-1} T_i \otimes T_{i+1}/T_i \longrightarrow 0$$

donc les quotients de la filtration (4.11) sont

$$\Lambda^{k-1} T_i \otimes T_{i+1}/T_i \otimes L_\lambda, \quad k-1 \leqslant i \leqslant n.$$

Par le lemme il suffit donc de prouver que

$$H^q(\mathbb{F}_\omega(2n+2), \Lambda^{k-1}T_i \otimes T_{i+1}/T_i \otimes L_\lambda) = 0, \text{ pour tout } i \text{ tel que } k-1 \leqslant i \leqslant n.$$

Comme $T_{i+1}/T_i = L_{-\varepsilon_i}$ ceci s'écrit

$$H^q(\mathbb{F}_\omega(2n+2), \Lambda^{k-1}T_i \otimes L_{\lambda-\varepsilon_i}) = 0, \quad k-1 \leqslant i \leqslant n$$

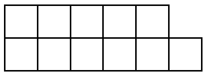
et celle-ci est une annulation presque identique à celle de l'énoncé. Comme dans l'argument jusqu'ici il n'a pas été essentiel que l'on travaillait avec le fibré tautologique T_{i+1} ni que le poids λ est dominant, on peut itérer cet argument pour trouver la suite suivante de conditions suffisantes :

$$\begin{array}{ll}
H^q(\mathbb{F}_\omega(2n+2), \Lambda^k T_{n+1} \otimes L_\lambda) = 0 & \\
\Longleftarrow H^q(\mathbb{F}_\omega(2n+2), \Lambda^{k-1}T_{i_1} \otimes L_{\lambda-\varepsilon_{i_1}}) = 0, & k-1 \leqslant i_1 \leqslant n \\
\Longleftarrow H^q(\mathbb{F}_\omega(2n+2), \Lambda^{k-2}T_{i_2} \otimes L_{\lambda-\varepsilon_{i_1}-\varepsilon_{i_2}}) = 0, & k-2 \leqslant i_2 < i_1 \\
\dots & \\
\Longleftarrow H^q(\mathbb{F}_\omega(2n+2), \Lambda^{2}T_{i_{k-2}} \otimes L_{\lambda-\varepsilon_{i_1}-\varepsilon_{i_2}-\cdots-\varepsilon_{i_{k-2}}}) = 0, & 2 \leqslant i_{k-2} < i_{k-3} \\
\Longleftarrow H^q(\mathbb{F}_\omega(2n+2), T_{i_{k-1}} \otimes L_{\lambda-\varepsilon_{i_1}-\varepsilon_{i_2}-\cdots-\varepsilon_{i_{k-1}}}) = 0, & 1 \leqslant i_{k-1} < i_{k-2} \\
\Longleftarrow H^q(\mathbb{F}_\omega(2n+2), L_{\lambda-\varepsilon_{i_1}-\varepsilon_{i_2}-\cdots-\varepsilon_{i_k}}) = 0, & 0 \leqslant i_k < i_{k-1}.
\end{array}$$

Autrement dit si

$$H^q(\mathbb{F}_\omega(2n+2), L_{\lambda-\varepsilon_{i_1}-\varepsilon_{i_2}-\cdots-\varepsilon_{i_k}}) = 0, \text{ pour tous } n \geqslant i_1 > i_2 > \cdots > i_k \geqslant 0$$

alors $H^q(\mathbb{F}_\omega(2n+2), \Lambda^k T_{n+1} \otimes L_\lambda) = 0$. Or comme λ est dominant, alors ou bien $\lambda - \varepsilon_{i_1} - \varepsilon_{i_2} - \cdots - \varepsilon_{i_k}$ est dominant ou bien $\lambda - \varepsilon_{i_1} - \varepsilon_{i_2} - \cdots - \varepsilon_{i_k} + \rho$ est singulier. En effet, si l'on regarde λ comme étant une partition, le diagramme de $\lambda - \varepsilon_{i_1} - \varepsilon_{i_2} - \cdots - \varepsilon_{i_k}$ est obtenu à partir de celui de λ en enlevant k cases situées sur k lignes différentes. À l'issue de cette opération soit on obtient une partition soit on obtient un diagramme qui contient deux lignes consécutives dans la configuration



cas dans lequel en ajoutant ρ on obtient une partition qui a deux parts égales et est donc singulière. Par le théorème de Bott on obtient alors

$$H^q(\mathbb{F}_\omega(2n+2), L_{\lambda-\varepsilon_{i_1}-\varepsilon_{i_2}-\cdots-\varepsilon_{i_k}}) = 0, \text{ pour tous } n \geqslant i_1 > i_2 > \cdots > i_k \geqslant 0$$

et donc la proposition est démontrée. ∎

Par la proposition précédente le complexe (4.10) est acyclique et en conséquence en prenant les sections globales on obtient la suite exacte

$$\begin{aligned}
0 \longrightarrow H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+2), \Lambda^{n+1}T_{n+1} \otimes L_\lambda) \longrightarrow \cdots \longrightarrow H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+2), T_{n+1} \otimes L_\lambda) \longrightarrow \\
\longrightarrow H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+2), L_\lambda) \longrightarrow H^0\big(\mathbb{F}_\omega(2n+1), L_\lambda|_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)}\big) \longrightarrow 0
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Pour calculer ces espaces de sections globales on utilise encore un argument de filtrations. Dans la démonstration de la proposition précédente on a muni le fibré $\Lambda^k T_{n+1} \otimes L_\lambda$ de la filtration

$$0 = \Lambda^k T_{k-1} \otimes L_\lambda \subset \Lambda^k T_k \otimes L_\lambda \subset \cdots \subset \Lambda^k T_n \otimes L_\lambda \subset \Lambda^k T_{n+1} \otimes L_\lambda$$

dont les quotients

$$\Lambda^{k-1} T_i \otimes L_{\lambda-\varepsilon_i}, \quad k-1 \leqslant i \leqslant n$$

sont acycliques. En prenant les sections globales on obtient que

$$\begin{aligned} 0 \subset H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+2), \Lambda^k T_k \otimes L_\lambda) \subset \cdots \\ \cdots \subset H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+2), \Lambda^k T_n \otimes L_\lambda) \subset H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+2), \Lambda^k T_{n+1} \otimes L_\lambda) \end{aligned}$$

est une filtration de $H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+2), \Lambda^k T_{n+1} \otimes L_\lambda)$ dont les quotients sont

$$H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+2), \Lambda^{k-1} T_i \otimes L_{\lambda-\varepsilon_i}), \quad k-1 \leqslant i \leqslant n.$$

En itérant l'argument comme dans la démonstration de la proposition on obtient que chacun des quotients $H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+2), \Lambda^{k-1} T_i \otimes L_{\lambda-\varepsilon_i})$ a une filtration dont les quotients sont

$$H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+2), \Lambda^{k-2} T_j \otimes L_{\lambda-\varepsilon_i-\varepsilon_j}), \quad k-2 \leqslant j < i.$$

En remontant ces filtrations à $H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+2), \Lambda^k T_{n+1} \otimes L_\lambda)$ on obtient dans $H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+2), \Lambda^k T_{n+1} \otimes L_\lambda)$ une filtration dont les quotients sont

$$H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+2), \Lambda^{k-2} T_{i_2} \otimes L_{\lambda-\varepsilon_{i_1}-\varepsilon_{i_2}}), \quad k-2 \leqslant i_2 < i_1 \leqslant n.$$

En continuant selon la même idée on déduit l'existence d'une filtration de $H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+2), \Lambda^k T_{n+1} \otimes L_\lambda)$ dont les quotients sont

$$H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+2), L_{\lambda-\varepsilon_{i_1}-\varepsilon_{i_2}-\cdots-\varepsilon_{i_k}}), \quad n \geqslant i_1 > i_2 > \cdots > i_k \geqslant 0.$$

Remarquons que tous les morphismes considérés dans la preuve de la proposition précédente sont Sp_{2n+2}-équivariants et donc que la filtration de $H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+2), \Lambda^k T_{n+1} \otimes L_\lambda)$ qui vient d'être obtenue est une filtration par des Sp_{2n+2}-modules. Par complète réductibilité, il résulte alors que $H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+2), \Lambda^k T_{n+1} \otimes L_\lambda)$ est isomorphe comme Sp_{2n+2}-module au gradué associé

$$\begin{aligned} H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+2), \Lambda^k T_{n+1} \otimes L_\lambda) &= \bigoplus_{n \geqslant i_1 > \cdots > i_k \geqslant 0} H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+2), L_{\lambda-\varepsilon_{i_1}-\varepsilon_{i_2}-\cdots-\varepsilon_{i_k}}) \\ &= \bigoplus_{\substack{n \geqslant i_1 > \cdots > i_k \geqslant 0 \\ \lambda-\varepsilon_{i_1}-\varepsilon_{i_2}-\cdots-\varepsilon_{i_k} \text{ dominant}}} V_{\lambda-\varepsilon_{i_1}-\varepsilon_{i_2}-\cdots-\varepsilon_{i_k}} \end{aligned} \tag{4.13}$$

où l'on désigne par V_μ le Sp_{2n+2}-module irréductible de plus haut poids μ.

Notation 4.2.3. Pour λ et μ des *partitions* on note $\mu \xrightarrow{p} \lambda$ si le diagramme de μ est obtenu à partir de celui de λ en enlevant p cases sur p lignes différentes.

Avec cette notation la formule (4.13) s'écrit

$$H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+2), \Lambda^k T_{n+1} \otimes L_\lambda) = \bigoplus_{\mu \xrightarrow{k} \lambda} V_\mu$$

et donc le complexe (4.12) devient

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{\mu \xrightarrow{n+1} \lambda} V_\mu \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_{\mu \xrightarrow{1} \lambda} V_\mu \longrightarrow V_\lambda \longrightarrow H^0\big(\mathbb{F}_\omega(2n+1), L_\lambda|_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)}\big) \longrightarrow 0. \quad (4.14)$$

Ce complexe provient du complexe de Koszul (4.9), il est donc équivariant pour le sous-groupe qui fixe la section $e_{\bar{n}}^*$, qui est $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$ – c'est donc un complexe de $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$-modules. Le $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$-module $H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+1), L_\lambda|_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)})$ que l'on cherche à déterminer est donc le conoyau du morphisme

$$\varphi : \bigoplus_{\mu \xrightarrow{1} \lambda} V_\mu \longrightarrow V_\lambda. \quad (4.15)$$

Lemme 4.2.4. *Le morphisme de* $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$*-modules*

$$\varphi : H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+2), T_{n+1} \otimes L_\lambda) \longrightarrow H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+2), L_\lambda)$$

provient d'un morphisme de Sp_{2n+2}*-modules*

$$\Phi : H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+2), T_{n+1}^*) \otimes H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+2), T_{n+1} \otimes L_\lambda) \longrightarrow H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+2), L_\lambda)$$

par la formule $\varphi(t) = \Phi(e_{\bar{n}}^* \otimes t)$.

PREUVE. Le morphisme Φ est la composée des applications

$$H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+2), T_{n+1}^*) \otimes H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+2), T_{n+1} \otimes L_\lambda) \longrightarrow H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+2), T_{n+1}^* \otimes T_{n+1} \otimes L_\lambda)$$

et

$$H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+2), T_{n+1}^* \otimes T_{n+1} \otimes L_\lambda) \longrightarrow H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+2), L_\lambda)\ ;$$

cette dernière provient du morphisme $T_{n+1}^* \otimes T_{n+1} \otimes L_\lambda \longrightarrow L_\lambda$ que l'on obtient en tensorisant par L_λ le crochet canonique $T_{n+1}^* \otimes T_{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)}$. Tous ces morphismes sont Sp_{2n+2}-équivariants, ce qui achève la preuve. ■

Le morphisme φ provient donc d'un morphisme de Sp_{2n+2}-modules

$$\Phi : \bigoplus_{\mu \xrightarrow{1} \lambda} V_\mu \otimes \tilde{E} \longrightarrow V_\lambda$$

par la formule $\varphi(v) = \Phi(v \otimes e_n)$ (on a identifié $\tilde{E}$ et $\tilde{E}^*$ à l'aide de $\tilde{\omega}$).

Remarque 4.2.5. Il n'existe qu'un seul morphisme de Sp_{2n+2}-modules $\bigoplus_{\mu \xrightarrow{1} \lambda} V_\mu \otimes \tilde{E} \longrightarrow V_\lambda$, à des facteurs multiplicatifs sur chacune des composantes $V_\mu \otimes \tilde{E}$ près. En effet, la multiplicité de V_λ dans chaque $V_\mu \otimes \tilde{E}$ est égale à 1 ; pour le voir on utilise la formule de Klimyk. Cette formule calcule la décomposition en composantes irréductibles du produit tensoriel de deux modules irréductibles sur un groupe semi-simple ; elle s'applique lorsque l'on connaît explicitement les poids de l'un des deux modules.

L'énoncé est le suivant : si G est un groupe semi-simple et V_λ désigne le G-module irréductible de plus haut poids λ alors

$$V_\lambda \otimes V_\mu = \sum_{\theta \text{ poids de } V_\lambda} \operatorname{mult}(\theta) t(\theta+\mu+\rho) V_{\overline{\theta+\mu+\rho}-\rho} \tag{4.16}$$

où la somme se fait dans l'anneau des représentations de G et où

- $\operatorname{mult}(\theta)$ est la multiplicité de θ dans V_λ,
- $t(\theta+\mu+\rho) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta+\mu+\rho \text{ est singulier} \\ \operatorname{sgn}(w) & \text{sinon, où } w \text{ est l'unique élément du groupe de Weyl tel} \\ & \text{que } w(\theta+\mu+\rho) \text{ est dominant} \end{cases}$
- si $\theta+\mu+\rho$ n'est pas singulier, $\overline{\theta+\mu+\rho}$ est l'unique poids dominant W-conjugué à $\theta+\mu+\rho$.

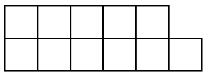
Dans notre cas, les poids de $\tilde{E}$ sont $\pm\varepsilon_i$, $0 \leqslant i \leqslant n$ chacun ayant la multiplicité 1, donc si $\mu \xrightarrow{1} \lambda$, c'est-à-dire $\mu = \lambda - \varepsilon_j$ et μ dominant, on a

$$\tilde{E} \otimes V_{\lambda-\varepsilon_j} = \sum_{\theta \in \{\pm\varepsilon_i;\ 0 \leqslant i \leqslant n\}} t(\theta+\lambda-\varepsilon_j+\rho) V_{\overline{\theta+\lambda-\varepsilon_j+\rho}-\rho}. \tag{4.17}$$

Maintenant, pour $\theta = \pm\varepsilon_i$ comme ci-dessus, si $\theta+\lambda-\varepsilon_j+\rho$ est non singulier alors

$$\overline{\theta+\lambda-\varepsilon_j+\rho} = \theta+\lambda-\varepsilon_j+\rho.$$

En effet, ceci découle de la remarque suivante, qu'on a déjà utilisée dans la démonstration de la proposition 4.2.1 : le poids $\nu = \theta+\lambda-\varepsilon_j$ s'obtient à partir de la partition $\lambda-\varepsilon_i$ en ajoutant ou en enlevant une case, donc ou bien ν est encore une partition, c'est-à-dire un poids dominant et donc $\nu+\rho$ aussi, ou bien ν contient une configuration du type



cas dans lequel $\nu+\rho$ est singulier. La formule (4.17) devient

$$\tilde{E} \otimes V_{\lambda-\varepsilon_j} = \sum_{\substack{\theta \in \{\pm\varepsilon_i;\ 0 \leqslant i \leqslant n\} \\ \theta+\lambda-\varepsilon_j \text{ dominant}}} V_{\theta+\lambda-\varepsilon_j} \tag{4.18}$$

et donc il est clair que V_λ apparaît dans $\tilde{E} \otimes V_{\lambda-\varepsilon_j}$ avec multiplicité 1.

Théorème 4.2.6. *Le $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$-module $H^0\big(\mathbb{F}_\omega(2n+1), L_\lambda|_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)}\big)$ est isomorphe au dual du $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$-module de Shtepin de plus haut poids λ, c'est-à-dire*

$$H^0\big(\mathbb{F}_\omega(2n+1), L_\lambda|_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)}\big) = (V'_\lambda)^*.$$

Preuve. En prenant les espaces duaux dans (4.14) on obtient en particulier la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+1), L_\lambda|_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)})^* \longrightarrow V_\lambda^* \xrightarrow{\varphi^*} \bigoplus_{\mu \xrightarrow{1} \lambda} V_\mu^*$$

donc $H^0\big(\mathbb{F}_\omega(2n+1), L_\lambda|_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)}\big)^*$ est le noyau de φ^*. Les Sp_{2n+2}-modules irréductibles sont autoduaux, on a donc $V_\lambda^* \simeq V_\lambda$ et pour démontrer le théorème il suffit donc, par la proposition

4.1.18, de montrer que le noyau de φ^* coïncide avec le $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$-sous-module de V_λ^* engendré par le vecteur de plus haut poids. Soit $\{v_\mu\}$ une base de T_{2n+2}-vecteurs propres dans V_λ, v_μ désignant un vecteur de poids μ, et soit $\{v_\mu^*\}$ la base duale ; alors le vecteur de plus haut poids de V_λ^* est $v_{-\lambda}^*$.

Montrons d'abord que $v_\lambda^* \in \operatorname{Ker}\varphi^*$. Soit μ tel que $\mu \xrightarrow{1} \lambda$ c'est-à-dire μ dominant et de la forme $\mu = \lambda - \varepsilon_i$; désignons encore par φ la composante $V_{\lambda-\varepsilon_i} \to V_\lambda$ de l'application (4.15). Alors $\varphi(v) = \Phi(v \otimes e_n)$ où $\Phi : V_{\lambda-\varepsilon_i} \otimes V \to V_\lambda$ est un morphisme de Sp_{2n+2}-modules.

Si par l'absurde $v_{-\lambda}^* \notin \operatorname{Ker}\varphi^*$ alors la forme linéaire $\varphi^*(v_{-\lambda}^*) \in V_{\lambda-\varepsilon_i}^*$ serait non nulle et il existerait donc au moins un vecteur de poids $v_\mu \in V_{\lambda-\varepsilon_i}$ tel que $\varphi^*(v_{-\lambda}^*)(v_\mu) \neq 0$. Or

$$\varphi^*(v_{-\lambda}^*)(v_\mu) = v_{-\lambda}^*(\varphi(v_\mu)) = v_{-\lambda}^*(\Phi(v_\mu \otimes e_n))$$

et $v_\mu \otimes e_n \in V_{\lambda-\varepsilon_i} \otimes V$ est de poids $\mu + \varepsilon_n$ donc $\Phi(v_\mu \otimes e_n)$ aussi et, comme $v_{-\lambda}^*(v_\nu) = 0$ si $\nu \neq -\lambda$, il résulte que $\mu + \varepsilon_n = -\lambda$. Mais $-\lambda - \varepsilon_n$ n'est pas un poids de $V_{\lambda-\varepsilon_i}^* \simeq V_{\lambda-\varepsilon_i}$ puisque $\lambda + \varepsilon_n = (\lambda - \varepsilon_i) + (\varepsilon_i + \varepsilon_n) > \lambda - \varepsilon_i$.

On a donc $v_{-\lambda}^* \in \operatorname{Ker}\varphi^*$ et par conséquent le $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$-sous-module engendré par $v_{-\lambda}^*$ est contenu dans $\operatorname{Ker}\varphi^*$. Pour montrer que ces deux sous-espaces coïncident il suffit de montrer qu'ils ont la même dimension. Par la formule (4.14) on a

$$\dim\ker\varphi^* = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i \sum_{\mu \xrightarrow{i} \lambda} \dim V_\mu.$$

Par ailleurs, les quotients de la filtration de Shtepin de V_μ sont les $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$-modules $\{V'_\theta ; \theta \to \mu\}$ (cf. la formule (4.7)) on a donc

$$\dim V_\mu = \sum_{\theta \longrightarrow \mu} \dim V'_\theta.$$

On veut donc démontrer que

$$\dim V'_\lambda = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i \sum_{\theta \longrightarrow \mu \xrightarrow{i} \lambda} \dim V'_\theta \; ; \tag{4.19}$$

on va montrer que l'on a

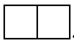
$$\lambda = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i \sum_{\theta \longrightarrow \mu \xrightarrow{i} \lambda} \theta \tag{4.20}$$

dans le groupe abélien libre engendré par les poids dominants de Sp_{2n+2}, c'est-à-dire que si l'on compte avec signes les poids θ du membre droit de la formule (4.19) alors le poids λ apparaît avec multiplicité 1 et tout poids $\theta \neq \lambda$ apparaît avec multiplicité 0.

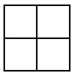
Soit donc θ une partition telle qu'il existe une partition μ qui vérifie $\theta \longrightarrow \mu \xrightarrow{i} \lambda$. Rappelons que $\theta \to \mu$ signifie que $\theta \subset \mu$ et le diagramme de la partition gauche $\mu \setminus \theta$ ne contient pas deux cases dans la même colonne et que $\mu \xrightarrow{i} \lambda$ signifie que $\mu \subset \lambda$ et la partition gauche $\lambda \setminus \mu$ est de norme i et ne contient pas deux cases dans la même ligne ; autrement dit, $\mu \setminus \theta$ ne contient pas la configuration

$$\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline\end{array}$$

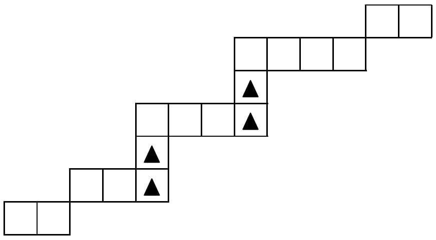
et $\lambda \setminus \mu$ ne contient pas la configuration

.

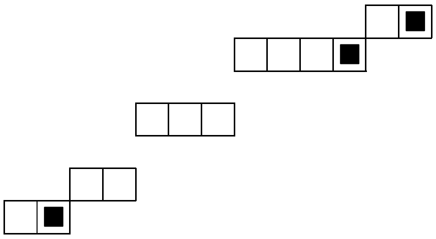
Il s'ensuit que $\lambda \setminus \theta$ ne contient pas la configuration



et donc c'est une « ligne brisée » :



Si $\lambda \setminus \theta$ contient plusieurs cases dans la même colonne, on marque par ▲ toutes ces cases à l'exception de celle qui est située au-dessus des autres. Puisque $\mu \setminus \theta$ ne contient pas la configuration il résulte que pour obtenir μ on doit enlever à λ au moins les cases marquées par ▲. Soit μ_0 la partition obtenue en enlevant à λ précisément ces cases ; alors $\mu_0 \xrightarrow{i_0} \lambda$, où i_0 est le nombre de cases marquées ▲, et μ_0 est maximum parmi les partitions μ qui vérifient $\theta \longrightarrow \mu \xrightarrow{i} \lambda$, c'est-à-dire que si μ est une telle partition alors $\mu \subset \mu_0$. Plus précisément, si $\theta \longrightarrow \mu \xrightarrow{i} \lambda$ alors $\mu \xrightarrow{i-i_0} \mu_0$ et μ est obtenue à partir de μ_0 en enlevant des cases situées seulement sur les lignes qui ne contiennent pas de case marquée ▲ ; soient $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_s$ ces lignes. Réciproquement, si $\theta \longrightarrow \mu \xrightarrow{k} \mu_0$ et μ s'obtient à partir de μ_0 en enlevant des cases situées sur les lignes $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_s$ alors $\theta \longrightarrow \mu \xrightarrow{k+i_0} \lambda$. Les diagrammes $\theta \longrightarrow \mu \xrightarrow{i} \lambda$ sont donc en bijection avec les diagrammes $\theta \longrightarrow \mu \xrightarrow{i-i_0} \mu_0$ telles que $\mu \setminus \mu_0$ contient seulement des cases situées sur les lignes $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_s$. Notons aussi que $\theta \longrightarrow \mu_0$ puisque, par le choix de μ_0, la partition gauche $\mu_0 \setminus \theta$ ne contient pas la configuration :



On marque par ■ les cases de $\mu_0 \setminus \theta$ situées à l'extrémité droite de chacune des lignes $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_s$ (si elles existent). Les partitions intermédiaires μ telles que $\theta \to \mu \xrightarrow{k} \mu_0$ et $\mu_0 \setminus \mu$ ne contient des cases que sur les lignes $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_s$ sont donc précisément les partitions obtenues en enlevant à μ_0 des cases parmi les cases marquées ■. Il résulte en comptant toutes les possibilités que la multiplicité de θ dans la somme (4.20) est

$$\pm \sum_{i=0}^{s} (-1)^i \binom{s}{i} = 0 \quad (\text{si } s \geqslant 1).$$

Notons que si $\theta \neq \lambda$ alors $s \geqslant 1$ parce que la première ligne de $\lambda \setminus \theta$ ne contient jamais de case marquée ▲. Par conséquent le seul cas où l'on a $s = 0$ est le cas $\theta = \lambda$ dans lequel $\lambda \setminus \theta = \varnothing$, $i_0 = 0$, et $s = 0$. Bien entendu il y a un seul diagramme qui correspond à ce cas : c'est le diagramme

$$\lambda \longrightarrow \lambda \xrightarrow{0} \lambda$$

donc la multiplicité de $\theta = \lambda$ dans (4.20) est 1. Ceci achève la preuve du théorème. ■

On a $L_{-\varepsilon_i} = T_{i+1}/T_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, respectivement $L_{-\varepsilon_0} = T_1$, donc si $\omega_0, \dots, \omega_n$ sont les poids fondamentaux de Sp_{2n+1}, alors $L_{\omega_i} = \det T_{i+1}^*$. Par conséquent, si $\lambda = a_0\omega_0 + \cdots + a_n\omega_n$, $a_0, \dots, a_n \geqslant 0$ alors

$$L_\lambda = (\det T_1^*)^{\otimes a_0} \otimes (\det T_2^*)^{\otimes a_1} \otimes \cdots \otimes (\det T_{n+1}^*)^{\otimes a_n}$$

donc

$$L_\lambda|_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)} = \left(\det T_1^*|_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)}\right)^{\otimes a_0} \otimes \left(\det T_2^*|_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)}\right)^{\otimes a_1} \otimes \cdots \otimes \left(\det T_{n+1}^*|_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)}\right)^{\otimes a_n}.$$

Or $T_i|_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)} = T_i$ – le fibré tautologique de rang i sur la variété de drapeaux symplectiques impaire $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$. On obtient ainsi un énoncé pour le théorème 4.2.6 qui ne fait aucune référence au plongement $\mathbb{F}_\omega(2n+1) \subset \mathbb{F}_\omega(2n+2)$:

Théorème 4.2.7. *Soit λ un poids dominant et L_λ le fibré en droites*

$$L_\lambda = (\det T_1^*)^{\otimes a_0} \otimes (\det T_2^*)^{\otimes a_1} \otimes \cdots \otimes (\det T_{n+1}^*)^{\otimes a_n}.$$

Alors le $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$-module $H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+1), L_\lambda)$ est isomorphe au dual du $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$-module de Shtepin de plus haut poids λ.

4.2.1 Les Sp_{2n+1}-modules de Proctor

Les représentations irréductibles du groupe symplectique Sp_{2n} ont des modèles explicites données par la construction de Weyl : cette construction réalise le Sp_{2n}-module irréductible de plus haut poids λ à l'intérieur du $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{C})$-module irréductible de plus haut poids λ comme le noyau de toutes les contractions possibles par la forme symplectique (cf. [FH91, §17.3]).

Proctor introduit dans [Pro88] des modules pour le groupe symplectique impair Sp_{2n+1}, en utilisant une forme adaptée de la construction de Weyl.

On peut en fait définir la construction de Weyl de manière uniforme, indépendamment de la parité de la dimension : soit $\omega \in \Lambda^2 V$ une forme générique sur un espace vectoriel complexe V et soit λ une partition. Le $\mathrm{GL}(V)$-module de plus haut poids λ coïncide avec la puissance de Schur $S_\lambda V \subset V^{\otimes d}$, où $d = |\lambda|$ est la somme des parts de λ. Pour $1 \leqslant p < q \leqslant d$ des entiers on note φ_{pq} la contraction par ω sur les positions p et q

$$\begin{aligned} \varphi_{pq} : V^{\otimes d} &\longrightarrow V^{\otimes d-2} \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_n &\longmapsto \omega(v_p, v_q) v_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{v_p} \otimes \cdots \otimes \widehat{v_q} \otimes \cdots \otimes v_n. \end{aligned} \tag{4.21}$$

On note alors, suivant [FH91, §17.3]

$$V^{\langle d \rangle} = \bigcap_{p,q} \operatorname{Ker} \varphi_{pq} \subset V^{\otimes d}$$

l'espace des d-tenseurs annulés par toutes ces contractions, et enfin,

$$S_{\langle\lambda\rangle}V = S_\lambda V \cap V^{\langle d\rangle} \; ;$$

c'est la *construction de Weyl.*

Pour $V = \mathbb{C}^{2n}$, si $\ell(\lambda) > n$ alors $S_{\langle\lambda\rangle}\mathbb{C}^{2n} = 0$, et si $\ell(\lambda) \leqslant n$ alors $S_{\langle\lambda\rangle}\mathbb{C}^{2n}$ est le Sp_{2n}-module irréductible de plus haut poids λ.

Pour $V = \mathbb{C}^{2n+1}$, Proctor démontre le résultat suivant (cf. [Pro88, théorème 2.1]) :

Proposition 4.2.8. *Si $\ell(\lambda) > n+1$ alors $S_{\langle\lambda\rangle}\mathbb{C}^{2n+1} = 0$; si $\ell(\lambda) \leqslant n+1$ alors $S_{\langle\lambda\rangle}\mathbb{C}^{2n+1}$ est un Sp_{2n+1}-module indécomposable.*

Proctor décrit, en outre, des bases dans les modules $S_{\langle\lambda\rangle}\mathbb{C}^{2n+1}$, il en déduit la formule de branchement pour la restriction à Sp_{2n} de ces modules et il obtient une formule pour le caractère de $S_{\langle\lambda\rangle}\mathbb{C}^{2n+1}$ très similaire à la formule de Weyl. En fait la règle de branchement et la formule des caractères sont identiques à celles obtenues par Shtepin pour ses $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$-modules ; dans la suite nous allons nous servir seulement de la première que nous rappelons ici (cf. [Pro88, corollaire 8.1]) :

$$S_{\langle\lambda\rangle}\mathbb{C}^{2n+1} = \bigoplus_{\mu\longrightarrow\lambda} V''_\mu \tag{4.22}$$

où V''_μ est le Sp_{2n}-module irréductible de plus haut poids μ et où, pour $\lambda = (\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{n+1})$ et $\mu = (\mu_1 \geqslant \cdots \geqslant \mu_n)$, la notation $\mu \to \lambda$ signifie comme plus tôt

$$\lambda_1 \geqslant \mu_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant \mu_n \geqslant \lambda_{n+1}$$

c'est-à-dire $\mu \subset \lambda$ et le diagramme de la partition gauche $\lambda \setminus \mu$ ne contient pas deux cases dans la même colonne.

Nous montrons dans ce qui suit que les modules de Shtepin et les modules de Proctor sont essentiellement les mêmes ; plus précisément, le $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$-module de Shtepin de plus haut poids λ admet également une structure de SSp_{2n+1}-module – où $\mathrm{SSp}_{2n+1} \subset \mathrm{Sp}_{2n+1}$ est le sous-groupe des transformations de déterminant 1 – compatible avec le morphisme de restriction $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1} \to \mathrm{SSp}_{2n+1}$, et avec cette structure il est isomorphe au SSp_{2n+1}-module $S_{\langle\lambda\rangle}\mathbb{C}^{2n+1}$. Autrement dit, $S_{\langle\lambda\rangle}\mathbb{C}^{2n+1}$ avec la structure de $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$-module qu'il acquiert via le morphisme $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1} \to \mathrm{SSp}_{2n+1}$ est isomorphe au $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$-module de Shtepin de plus haut poids λ. Nous allons donner un énoncé un peu plus général qui prend en compte également la structure de Sp_{2n+1}-module de $S_{\langle\lambda\rangle}\mathbb{C}^{2n+1}$ et pas seulement la structure de SSp_{2n+1}-module. Nous utilisons les mêmes notations que dans la section précédente ; rappelons en particulier que P est le sous-groupe parabolique de Sp_{2n+2} qui préserve la droite $\mathbb{C}e_n$.

Proposition 4.2.9. *$S_{\langle\lambda\rangle}\mathbb{C}^{2n+1}$ avec la structure de P-module qu'il obtient par le morphisme de restriction $P \to \mathrm{Sp}_{2n+1}$ est isomorphe au P-sous-module du Sp_{2n+2}-module irréductible de plus haut poids λ engendré par un vecteur de plus haut poids. En se restreignant au sous-groupe SSp_{2n+1}, $S_{\langle\lambda\rangle}\mathbb{C}^{2n+1}$ avec la structure de $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$-module qu'il obtient via le morphisme $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1} \longrightarrow \mathrm{SSp}_{2n+1}$ est isomorphe au $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$-module de Shtepin V'_λ.*

PREUVE. Soit V_λ un Sp_{2n+2}-module irréductible de plus haut poids λ et $v_\lambda \in V_\lambda$ un vecteur de plus haut poids. Rappelons qu'ici un vecteur de plus haut poids est un B_{2n+2}-vecteur propre où $B_{2n+2} \subset \mathrm{Sp}_{2n+2}$ est le sous-groupe Borel qui préserve le drapeau $\langle e_0\rangle \subset \langle e_0, e_1\rangle \subset \cdots \subset \langle e_0, \ldots, e_{2n+1}\rangle$.

Le morphisme de restriction

$$P \to \mathrm{Sp}_{2n+1}, \quad g \mapsto g|_E$$

est surjectif et son noyau est

$$N = \{g \in P \mid g|_E = \mathrm{Id},\, \bar{g} = \mathrm{Id}_{\tilde{E}/e_n}\}$$

où $\bar{g}$ est le morphisme induit par g sur $\tilde{E}/e_n$ (modulo une conjugaison dans Sp_{2n+2} par un élément qui échange e_0 et e_n ceci a été démontré dans la proposition 1.1.12 et la formule (1.7) qui la suit). En particulier, N est inclus dans le sous-groupe unipotent maximal de B_{2n+2}, donc N fixe le vecteur de plus haut poids v_λ et donc N agit trivialement sur le P-sous-module $\langle P \cdot v_\lambda \rangle$ engendré par v_λ dans V_λ.[4] Il résulte que l'action de P sur $\langle P \cdot v_\lambda \rangle$ passe au quotient à travers le morphisme de restriction $P \to \mathrm{Sp}_{2n+1}$ et donc $\langle P \cdot v_\lambda \rangle$ a une structure de Sp_{2n+1}-module.

Nous montrons dans la suite que $\langle P \cdot v_\lambda \rangle$ est isomorphe comme Sp_{2n+1}-module à $S_{\langle\lambda\rangle}\mathbb{C}^{2n+1}$. Nous commençons par identifier V_λ à la construction de Weyl

$$V_\lambda = S_{\langle\lambda\rangle}\tilde{E} = S_\lambda \tilde{E} \cap \tilde{E}^{\langle d \rangle}$$

où $d = |\lambda|$ est la norme de λ.

La puissance de Schur $S_\lambda \tilde{E}$ est l'image du symétriseur de Young $c_\lambda : \tilde{E}^{\otimes d} \to \tilde{E}^{\otimes d}$ qui est un endomorphisme de $\tilde{E}^{\otimes d}$ défini à partir de l'action du groupe symétrique S_d sur $\tilde{E}^{\otimes d}$ par permutation des facteurs.[5] Le sous-espace $E^{\otimes d} \subset \tilde{E}^{\otimes d}$ est un sous-module de $\tilde{E}^{\otimes d}$ pour l'action du groupe symétrique S_d, en particulier son symétriseur de Young est tout simplement la restriction de c_λ à $E^{\otimes d}$. De plus, $E^{\otimes d}$ admet comme S_d-module un complémentaire dans $\tilde{E}^{\otimes d}$ – toute représentation d'un groupe fini est complètement réductible, mais dans ce cas on peut l'écrire explicitement : c'est le sous-espace engendré par tous les monômes $v_1 \otimes \cdots \otimes v_d$ dont une des composantes est $e_{\bar{n}}$; on a donc

$$S_\lambda E = c_\lambda(E^{\otimes d}) = c_\lambda(\tilde{E}^{\otimes d}) \cap E^{\otimes d} = S_\lambda \tilde{E} \cap E^{\otimes d}.$$

Soit

$$\varphi_{pq} : E^{\otimes d} \longrightarrow E^{\otimes d-2}$$

la contraction par ω sur les positions p et q définie par la formule (4.21), soit

$$\tilde{\varphi}_{pq} : \tilde{E}^{\otimes d} \longrightarrow \tilde{E}^{\otimes d-2}$$

la contraction définie par la même formule en utilisant $\tilde{\omega}$ au lieu de ω. Puisque $\tilde{\omega}|_E = \omega$ on a

$$\tilde{\varphi}_{pq}|_{E^{\otimes d}} = \varphi_{pq}, \qquad \text{pour tous } 0 \leqslant p < q \leqslant n$$

donc

$$E^{\langle d \rangle} = \bigcap_{p,q} \mathrm{Ker}\, \varphi_{pq} = E^{\otimes d} \cap \bigcap_{p,q} \mathrm{Ker}\, \tilde{\varphi}_{pq} = E^{\otimes d} \cap \tilde{E}^{\langle d \rangle}.$$

[4] Il suffit bien entendu d'écrire $ngv_\lambda = g(g^{-1}ng)v_\lambda = gv_\lambda$.

[5] c_λ est en réalité un élément de l'algèbre de groupe $\mathbb{C}[S_d]$. Ici on a noté par la même lettre son image dans $\mathrm{End}(\tilde{E}^{\otimes d})$ correspondant à l'action de S_p.

On en déduit

$$S_{\langle\lambda\rangle}E = S_\lambda E \cap E^{\langle d\rangle} = S_\lambda \tilde{E} \cap E^{\otimes d} \cap \tilde{E}^{\langle d\rangle} \cap E^{\otimes d} = S_{\langle\lambda\rangle}\tilde{E} \cap E^{\otimes d}.$$

Maintenant, le vecteur de plus haut poids v_λ de $S_{\langle\lambda\rangle}\tilde{E}$ est également le vecteur de plus haut poids de $S_\lambda\tilde{E}$ et coïncide avec l'image par c_λ du tenseur

$$e^\lambda = e_0^{\otimes\lambda_0} \otimes e_1^{\otimes\lambda_1} \otimes \cdots \otimes e_n^{\otimes\lambda_n} \ ;$$

en effet, comme le sous-espace $\langle e_0, \ldots, e_n\rangle$ est isotrope pour $\tilde{\omega}$, $c_\lambda(e^\lambda)$ appartient bien à $S_{\langle\lambda\rangle}\tilde{E}$ et comme il est de poids λ il coïncide (à une constante près) avec v_λ.

On remarque en particulier que v_λ est dans $E^{\otimes d}$ donc dans $S_{\langle\lambda\rangle}E$ et, comme P agit dans E via le morphisme de restriction $P \to \mathrm{Sp}_{2n+1}$, il résulte alors que le P-sous-module de $S_{\langle\lambda\rangle}\tilde{E}$ engendré par v_λ coïncide avec le Sp_{2n+1}-sous-module engendré par v_λ dans $S_{\langle\lambda\rangle}E$

$$\langle P \cdot v_\lambda\rangle = \langle \mathrm{Sp}_{2n+1}.v_\lambda\rangle \subset S_{\langle\lambda\rangle}E.$$

Maintenant, le P-sous-module de $V_\lambda = S_{\langle\lambda\rangle}\tilde{E}$ engendré par v_λ coïncide avec le $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$-sous-module engendré par v_λ, c'est-à-dire avec $V'_\lambda \subset V_\lambda$. En effet, au niveau des algèbres de Lie on a (cf. la formule (4.6))

$$\mathfrak{p} = \widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1} \oplus \mathbb{C}X_{nn}$$

où $X_{nn} \in \mathfrak{t}_{2n+2}$; par le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt on a donc

$$U(\mathfrak{p})v_\lambda = U(\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1})U(\mathbb{C}X_{nn})v_\lambda = U(\widetilde{\mathfrak{sp}}_{2n+1})\mathbb{C}v_\lambda = V'_\lambda.$$

Or comme on a vu, V'_λ et $S_{\langle\lambda\rangle}E$ ont la même décomposition en Sp_{2n}-composantes irréductibles (formules (4.8) et (4.22)), en particulier $\langle P \cdot v_\lambda\rangle = V'_\lambda$ et $S_{\langle\lambda\rangle}E$ ont même dimension et donc

$$\langle P \cdot v_\lambda\rangle = S_{\langle\lambda\rangle}E.$$

Pour obtenir la deuxième affirmation de l'énoncé il suffit maintenant d'utiliser le fait qu'en restreignant le morphisme $P \longrightarrow \mathrm{Sp}_{2n+1}$ au sous-groupe $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1} \subset P$ on obtient un morphisme surjectif $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1} \longrightarrow \mathrm{SSp}_{2n+1}$. ∎

Corollaire 4.2.10. *Le Sp_{2n+1}-module de Proctor $S_{\langle\lambda\rangle}E$ est le Sp_{2n+1}-sous-module de $S_\lambda E$ engendré par le vecteur de plus haut poids v_λ.*

À présent, remarquons que la sous-variété $\mathbb{F}_\omega(2n+1) \subset \mathbb{F}_\omega(2n+2)$ est stable également sous le groupe P et donc, en particulier, le fibré en droites $L_\lambda|_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)}$ n'est pas seulement $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$-linéarisé, mais aussi P-linéarisé ; par conséquent, l'espace des sections globales $H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+1), L_\lambda|_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)})$ est un P-module. La proposition suivante est la version P-équivariante du théorème 4.2.6 :

Proposition 4.2.11. *Le P-module $H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+1), L_\lambda|_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)})$ est isomorphe au dual du P-sous-module engendré par le vecteur de plus haut poids v_λ dans V_λ.*

Preuve. On remarque que l'application de restriction

$$H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+2), L_\lambda) \longrightarrow H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+1), L_\lambda|_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)})$$

est P-équivariante, puisqu'il en est ainsi chaque fois que l'on restreint un fibré linéarisé sous un groupe à une sous-variété stable sous l'action de ce groupe. Il s'ensuit que la duale de cette application de restriction, qui est en l'occurrence l'inclusion

$$H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+1), L_\lambda|_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)})^* \subset V_\lambda,$$

est également un morphisme de P-modules. Or on sait déjà de la démonstration du théorème 4.2.6 que le sous-espace vectoriel $H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+1), L_\lambda|_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)})^* \subset V_\lambda$ coïncide avec le $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{2n+1}$-sous-module V'_λ engendré par v_λ, et de la démonstration précédente que $V'_\lambda = \langle P \cdot v_\lambda \rangle$. ■

Comme remarqué plus tôt, si $\lambda = a_0\omega_0 + \cdots + a_n\omega_n$, $a_0, \ldots, a_n \geqslant 0$, alors

$$L_\lambda|_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)} = (\det T_1^*)^{\otimes a_0} \otimes (\det T_2^*)^{\otimes a_1} \otimes \cdots \otimes (\det T_{n+1}^*)^{\otimes a_n},$$

donc il résulte que l'action de P sur le fibré $L_\lambda|_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)}$ – et donc dans l'espace vectoriel $H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+1), L_\lambda|_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)})$ – se fait à travers le morphisme de restriction $P \to \mathrm{Sp}_{2n+1}$. On déduit alors aussitôt de la proposition précédente et de la proposition 4.2.9 le théorème suivant :

Théorème 4.2.12. *Soit λ un poids dominant, $\lambda = a_0\omega_0 + \cdots + a_n\omega_n$, $a_0, \ldots, a_n \geqslant 0$, et L_λ le fibré en droites*

$$L_\lambda = (\det T_1^*)^{\otimes a_0} \otimes (\det T_2^*)^{\otimes a_1} \otimes \cdots \otimes (\det T_{n+1}^*)^{\otimes a_n}$$

sur la variété de drapeaux symplectiques impaire $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$. Alors le Sp_{2n+1}-module $H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+1), L_\lambda)$ est isomorphe au dual du Sp_{2n+1}-module de Proctor de plus haut poids λ, c'est-à-dire

$$H^0(\mathbb{F}_\omega(2n+1), L_\lambda) = (S_{\langle\lambda\rangle}\mathbb{C}^{2n+1})^*.$$

Chapitre 5

Cohomologie équivariante de la variété de drapeaux symplectiques impaire

Dans ce dernier chapitre nous nous intéressons à la cohomologies ordinaire et équivariante de la variété de drapeaux symplectiques impaire $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$. Nous allons nous occuper presque exclusivement de la deuxième (plus précisément de l'anneau de cohomologie équivariante de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ correspondant à l'action d'un tore maximal T de Sp_{2n+1}) ; en effet, pour certains espaces topologiques, parmi lesquels les variétés projectives complexes lisses – donc en particulier la variété de drapeaux symplectiques impaire $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$, la connaissance de la cohomologie équivariante permet de déterminer la cohomologie ordinaire.

5.1 Cohomologie équivariante

Pour définir la cohomologie équivariante nous nous plaçons dans le cadre général d'un espace topologique X muni d'une action d'un groupe topologique G. Nous considérons le G-fibré principal universel EG du groupe G ; cet espace est caractérisé par les propriétés d'être contractile et d'être muni d'une G-action libre. Alors l'espace quotient $BG = EG/G$ est *l'espace classifiant* du groupe G ; cette appellation reflète la propriété d'universalité suivante : $EG \to BG$ est une G-fibration principale et toute autre G-fibration principale $E \to B$ s'obtient en tirant en arrière la fibration $EG \to BG$ via un morphisme $B \to BG$, unique à homotopie près. Nous considérons alors la *construction de Borel*

$$X \times_G EG$$

qui est le quotient du produit $X \times EG$ par l'action diagonale de G

$$g : (x, e) \mapsto (gx, ge), \qquad g \in G,\ x \in X,\ e \in EG.$$

La deuxième projection $X \times EG \to EG$ passe au quotient et, puisque G agit librement dans EG, la projection ainsi obtenue

$$X \times_G EG \longrightarrow BG$$

est une fibration de fibre X. Si A est un anneau, on définit alors *l'anneau de cohomologie équivariante à coefficients dans A*

$$H_G^*(X, A)$$

comme étant l'anneau de cohomologie ordinaire $H^*(X \times_G EG, A)$.

La cohomologie équivariante ainsi définie est un foncteur contravariant de la catégorie des G-espaces, où les morphismes sont les applications G-équivariantes, à valeurs dans la catégorie des A-modules. Ceci provient de la fonctorialité de la cohomologie ordinaire et du fait que la construction de Borel

$$X \longmapsto X \times_G EG$$

est un foncteur covariant défini sur la catégorie des G-espaces.

Une particularité de la cohomologie équivariante est que le point a une cohomologie équivariante beaucoup plus riche que sa cohomologie ordinaire : si dans la définition ci-dessus $X = pt$ est un point alors $pt \times_G EG = BG$ donc

$$H_G^*(pt, A) = H^*(BG, A)$$

qui est en général un anneau beaucoup plus grand que $H^*(pt, A) = A$. Désormais on va supposer que l'anneau des coefficients est le corps $\mathbb{C}$ et on va omettre de le mentionner dans la notation.

Par fonctorialité, le morphisme constant $X \to pt$ induit au niveau de la cohomologie équivariante un morphisme d'anneaux

$$H_G^*(pt) \longrightarrow H_G^*(X)$$

(qui coïncide avec le morphisme $H^*(BG) \to H^*(X \times_G EG)$ induit par la projection $X \times_G EG \to BG$) ; de cette manière l'anneau $H_G^*(X)$ devient un $H_G^*(pt)$-module.

Identifions X à une fibre de $p : X \times_G EG \to BG$; cette identification dépend du choix d'un point base $e_0 \in EG$: l'application

$$X \hookrightarrow X \times_G EG, \qquad x \mapsto G \cdot (x, e_0) \tag{5.1}$$

réalise un isomorphisme entre X et la fibre $p^{-1}(G \cdot e_0)$ de $X \times_G EG$ située au-dessus du point $G \cdot e_0 \in BG$. L'inclusion (5.1) définit un morphisme de restriction

$$H_G^*(X) = H^*(X \times_G EG) \longrightarrow H^*(X); \tag{5.2}$$

si l'on fixe le point base $e_0 \in EG$ et on fait varier X, les morphismes de restriction (5.2) ainsi obtenus définissent une transformation naturelle entre les foncteurs $H_G^*(-)$ et $H^*(-)$. Notons que si $s \in H_G^*(pt) = H^*(BG)$ est un élément homogène de degré strictement positif alors $(p^*s)|_X = 0$ donc l'idéal de $H_G^*(X)$ engendré par les éléments homogènes de degré strictement positif de $H_G^*(pt)$ est inclus dans le noyau du morphisme de restriction (5.2) ; il s'ensuit que ce morphisme se factorise par le morphisme

$$H_G^*(X)/H_G^+(pt) \cdot H_G^*(X) = H_G^*(X) \otimes_{H_G^*(pt)} \mathbb{Q} \longrightarrow H^*(X). \tag{5.3}$$

Pour certains espaces X ce dernier morphisme est un isomorphisme et permet donc de retrouver la cohomologie ordinaire à partir de la cohomologie équivariante.

Des exemples de tels espaces sont les espaces *équivariants formels* qui sont les G-espaces X pour lesquels la suite spectrale

$$H^p(BG, H^q(X)) \Longrightarrow H_G^{p+q}(X),$$

associée à la fibration $X \times_G EG \to BG$, dégénère. Parmi les propriétés d'un espace équivariant formel nous retenons les deux suivantes :

1. le morphisme (5.3) est un isomorphisme ;
2. le $H_G^*(pt)$-module $H_G^*(X)$ est libre.

La condition de la définition d'un espace équivariant formel est assez difficile à manipuler mais dans la pratique il suffit de savoir que la classe des espaces équivariants formels comprend en particulier les espaces suivants :

– les G-variétés symplectiques hamiltoniennes, lorsque G est un groupe de Lie connexe compact – parmi celles-ci on compte les variétés complexes lisses munies d'une G-action linéaire (cf. [Bri98]) ;
– les G-espaces dont les nombres de Betti d'ordre impair sont nuls, lorsque G est un tore.

5.1.1. En général, l'espace total et la base de la fibration universelle $EG \to BG$ sont des espaces de dimension infinie ce qui nous sort en particulier de la catégorie des variétés algébriques. Mais dans certains cas, ces espaces admettent des approximations par des espaces de dimension finie. C'est par exemple le cas si $G = T$ est un tore. Pour illustrer ceci, considérons d'abord le cas où T est de rang 1. Le tore $T = \mathbb{C}^*$ agit par homothéties sur $\mathbb{C}^m \setminus \{0\}$ avec le quotient $\mathbb{P}^{m-1}$; la fibration

$$ET_m = \mathbb{C}^m \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^{m-1} = BT_m$$

est une T-fibration principale. Les inclusions

$$\mathbb{C}^m \setminus \{0\} \hookrightarrow \mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\},$$

$(z_1, \ldots, z_m) \mapsto (z_1, \ldots, z_m, 0)$ sont compatibles avec l'action de T et définissent un système inductif de fibrations dont la limite

$$ET = \mathbb{C}^\infty \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^\infty = BT$$

est une T-fibration universelle. Pour le cas général $T = (\mathbb{C}^*)^r$ on considère de manière similaire les fibrations principales

$$ET_m = (\mathbb{C}^m \setminus \{0\})^r \longrightarrow (\mathbb{P}^{m-1})^r = BT_m$$

qui forment un système inductif via les inclusions $(\mathbb{C}^m \setminus \{0\})^r \hookrightarrow (\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\})^r$; sa limite

$$ET = (\mathbb{C}^\infty \setminus \{0\})^r \longrightarrow (\mathbb{P}^\infty)^r = BT$$

est alors une T-fibration universelle.

On peut construire de manière analogue une approximation pour la fibration universelle du groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$:

$$E\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})_m \longrightarrow B\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})_m$$

(cf. [Bri98]) ; en se restreignant à un sous-groupe fermé $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ on obtient alors une suite de G-fibration principales

$$E\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})_m = EG_m \longrightarrow EG_m/G = BG_m$$

qui approximent la G-fibration universelle

$$E\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) = EG \longrightarrow EG/G = BG.$$

Un des avantages que présentent les approximations de la fibration universelle est illustré par la remarque suivante (cf. [Hus94, Ch. IV, Th 13.1]) : si q est fixé, soit n un entier, $n \geqslant \dim X$, $n \geqslant q$, et $E \to B$ une G-fibration principale dont l'espace total E est n-connexe – c'est-à-dire que toute application continue d'une sphère de dimension au plus n dans E est homotope à une application constante ; alors $H^q_G(X) = H^q(X \times_G E)$.

En particulier si $T = (\mathbb{C}^*)^r$ alors

$$H^q_T(X) = H^q(X \times_T ET_m)$$

si $2m - 2 \geqslant q$.

5.1.2. En général, si $E \to B$ est une G-fibration principale et si $\pi : Y \to X$ est une fibration G-équivariante (c'est-à-dire que π est une application G-équivariante) de fibre F alors l'application induite $Y \times_G E \to X \times_G E$ est encore une fibration de fibre F. Par exemple, si $A \to X$ est un fibré vectoriel complexe G-linéarisé de rang r, alors $A \times_G E \to X \times_G E$ est un fibré vectoriel de rang r dont la restriction à $X \subset X \times_G E$ est A. En particulier, si X se réduit à un point alors un fibré vectoriel G-linéarisé sur $X = pt$ est tout simplement un G-module V, qui induit donc un fibré vectoriel $E \times_G V \to B$ sur B dont la fibre au point base de B s'identifie à V.

Lorsque $E \to B$ est la fibration universelle $EG \to BG$, les classes de Chern du fibré $A \times_G EG$ sont des classes dans $H^*_T(X)$ qui prolongent les classes de Chern de E ; on les appelle *classes de Chern équivariantes* de A et on les note $c_{i,T}(A) = c_i(A \times_G EG)$.

5.1.3. On suppose désormais que le groupe $G = T$ est un tore complexe. Considérons pour commencer le cas où T est de rang 1, $T = \mathbb{C}^*$. On a vu que le fibré universel de $\mathbb{C}^*$

$$E\mathbb{C}^* = \mathbb{C}^\infty \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^\infty = B\mathbb{C}^*$$

est la limite des fibrations principales

$$\mathbb{C}^m \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^{m-1}.$$

Ici $\mathbb{C}^\infty \setminus \{0\} = \varinjlim \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$ et $\mathbb{P}^\infty = \varinjlim \mathbb{P}^m$ sont munis de la topologie limite inductive, c'est-à-dire qu'un sous-ensemble $U \subset \mathbb{C}^\infty \setminus \{0\}$, respectivement $U \subset \mathbb{P}^\infty$, est ouvert si et seulement si, pour tout m, $U \cap \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$ est ouvert dans $\mathbb{C}^m \setminus \{0\}$, respectivement $U \cap \mathbb{P}^m$ est ouvert dans $\mathbb{P}^m$. On a alors

$$\begin{aligned} H^*_{\mathbb{C}^*}(pt) &= H^*(B\mathbb{C}^*) = H^*(\mathbb{P}^\infty) \\ &= H^*(\varinjlim \mathbb{P}^m) = \varprojlim H^*(\mathbb{P}^m) \\ &= \varprojlim \mathbb{C}[h]/(h^{m+1}) = \mathbb{C}[h], \end{aligned} \tag{5.4}$$

où les limites projectives sont dans la catégorie des anneaux gradués[1]. Ici $h \in H^2(\mathbb{P}^\infty)$ est la classe d'un hyperplan de $\mathbb{P}^\infty$ qui est un fermé $H \subset \mathbb{P}^\infty$ tel que pour tout m, $H \cap \mathbb{P}^m$ est un hyperplan de $\mathbb{P}^m$. Une autre façon d'exprimer l'isomorphisme (5.4) est la suivante. Soit $\mathbb{C}_\lambda$ le $\mathbb{C}^*$-module de dimension 1 de poids $\lambda \in \mathbb{Z} = X(\mathbb{C}^*)$; $\mathbb{C}_\lambda$ induit comme au numéro précédent des fibrés en droites

$$L_{\lambda,m} = \mathbb{C}_\lambda \times_{\mathbb{C}^*} (\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}) \longrightarrow \mathbb{P}^m, \qquad m \in \mathbb{N}$$

[1]Et pas simplement dans la catégorie des anneaux, où la deuxième limite vaut $\mathbb{C}[[h]]$, l'anneau des séries formelles en une variable.

respectivement
$$L_\lambda = \mathbb{C}_\lambda \times_{\mathbb{C}^*} (\mathbb{C}^\infty \setminus \{0\}) \longrightarrow \mathbb{P}^\infty.$$

Il est clair d'après la construction que pour tout m on a $L_\lambda|_{\mathbb{P}^m} = L_{\lambda,m}$; de même, on vérifie directement que si $\lambda = d \in \mathbb{Z}$ alors $L_{\lambda,m} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(d)$. Si l'on identifie un caractère de $\mathbb{C}^*$ et sa différentielle alors l'application $\lambda \mapsto c_{1,T}(\mathbb{C}_\lambda) = c_1(L_\lambda)$ qui associe à un poids λ la première classe de Chern du fibré en droites L_λ se prolonge en un isomorphisme $(\mathrm{Lie}(\mathbb{C}^*))^* \longrightarrow H^2(B\mathbb{C}^*) = H^2(\mathbb{P}^\infty)$ qui induit un isomorphisme d'algèbres

$$\mathrm{Sym}(\mathrm{Lie}(\mathbb{C}^*)^*) \longrightarrow H^*(B\mathbb{C}^*) = H^*_{\mathbb{C}^*}(pt)$$

qui double le degré, que l'on appelle le *morphisme caractéristique.*

Dans le cas général $T = (\mathbb{C}^*)^r$ d'un tore de rang r on a $BT = (\mathbb{P}^\infty)^r$ et, par la formule de Künneth,
$$H^*_T(pt) = H^*((\mathbb{P}^\infty)^r) = H^*(\mathbb{P}^\infty)^{\otimes r} = \mathbb{C}[h_1, \ldots, h_r]$$

est un anneau de polynômes où les variables $h_1, \ldots, h_r$ sont de degré 2. Le morphisme caractéristique est un isomorphisme d'algèbres qui double le degré

$$\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}^*) \longrightarrow H^*_T(pt)$$

et qui est induit par l'application $\lambda \mapsto c_{1,T}(\mathbb{C}_\lambda) = c_1(L_\lambda) \in H^2(BT)$ qui associe à un poids λ la première classe de Chern du fibré en droites $L_\lambda = \mathbb{C}_\lambda \times_T ET \to BT$.

5.1.4. Soit X^T l'ensemble des T-points fixes d'un T-espace X. L'inclusion $i : X^T \hookrightarrow X$ est T-équivariante et induit donc un morphisme au niveau de la cohomologie équivariante $i^* : H^*_T(X) \longrightarrow H^*_T(X^T)$ qu'on appelle *restriction aux points fixes.* Si X est compact, le théorème de localisation de Borel-Atiyah-Segal (cf. [Hsi75, III.§2]) affirme que le noyau et le conoyau de i^* sont des $H^*_T(pt)$-modules de torsion. Autrement dit, après une localisation appropriée le morphisme de restriction i^* devient un isomorphisme. Maintenant, si de plus l'espace X est équivariant formel alors l'anneau de cohomologie équivariante $H^*_T(X)$ est un $H^*_T(pt)$-module libre et donc le théorème de localisation entraîne que la restriction aux points fixes est une injection
$$i^* : H^*_T(X) \hookrightarrow H^*_T(X^T).$$

Ceci est encore une propriété caractéristique de la cohomologie équivariante : sous les bonnes hypothèses, la cohomologie équivariante de l'espace X est contrôlée par la cohomologie équivariante du sous-ensemble strict (en général) X^T ; dans les cas qui nous intéressent dans la suite, l'ensemble des points fixes X^T va être même fini, donc dans ces cas la cohomologie équivariante d'un nombre fini de points contient déjà toute l'information nécessaire pour reconstituer la cohomologie équivariante de l'espace tout entier.

5.1.5. Supposons maintenant que X est une variété algébrique projective munie d'une action algébrique d'un tore T qui en fait un T-espace équivariant formel. Si le tore T agit dans X avec un nombre fini de points fixes et d'orbites de dimension 1, alors l'image de l'anneau de cohomologie équivariante de X dans l'anneau de cohomologie équivariante de son ensemble de points fixes X^T via l'inclusion

$$i^* : H^*_T(X) \hookrightarrow H^*_T(X^T)$$

est décrite par un théorème de Goresky, Kottwitz et MacPherson que nous allons énoncer ci-dessous ; on donne d'abord quelques précisions.

Soit $E \subset X$ une T-orbite de dimension 1 ; soit x un point de E et soit $T_x \subset T$ son stabilisateur. Puisque T est abélien, T_x ne dépend pas de x ; on l'appelle *le type de l'orbite* E ce qui se justifie aussi par le fait que E est isomorphe en tant que T-espace au quotient T/T_x. Le groupe T/T_x est un tore connexe puisque c'est l'image de T, comme il est de dimension 1 on a $E \simeq T/T_x \simeq \mathbb{C}^*$. L'action de T dans E se fait donc via le caractère $\lambda : T \to T/T_x \simeq \mathbb{C}^*$; soit $\gamma : \mathbb{C}^* \to T$ un sous-groupe à un paramètre tel que $\langle \gamma, \lambda \rangle = 1$ c'est-à-dire $\lambda(\gamma(t)) = t$ pour tout $t \in \mathbb{C}^*$. Alors E est une orbite de γ et, puisque X est complète, l'application

$$\varphi : \mathbb{C}^* \longrightarrow X \qquad t \mapsto \gamma(t) \cdot x$$

se prolonge en une application

$$\bar{\varphi} : \mathbb{P}^1 \longrightarrow X$$

dont l'image est l'adhérence $\overline{E}$ de l'orbite E. L'adhérence $\overline{E}$ est donc isomorphe à une droite projective et s'obtient en ajoutant à E les deux points $\bar{\varphi}(0)$ et $\bar{\varphi}(\infty)$. Ces deux points sont des T-points fixes : en effet, l'ensemble $\partial E = \overline{E} \setminus E = \{\bar{\varphi}(0), \bar{\varphi}(\infty)\}$ est T-stable.

Avant d'énoncer le théorème de Goresky, Kottwitz et MacPherson notons que $H_T^*(X^T)$ est un produit fini d'anneaux de polynômes

$$H_T^*(X^T) = \bigoplus_{p \in X^T} H_T^*(p) = \bigoplus_{p \in X^T} \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}^*) = \bigoplus_{p \in X^T} \mathbb{C}[\mathfrak{t}].$$

Théorème 5.1.6 ([GKM98]). *Soit X une variété algébrique projective sur laquelle agit un tore T avec un nombre fini de points fixes et d'orbites de dimension 1. Si X est un T-espace équivariant formel alors l'image de l'anneau de cohomologie équivariante $H_T^*(X)$ dans $H_T^*(X^T) = \bigoplus_{p \in X^T} \mathbb{C}[\mathfrak{t}]$ via l'injection*

$$i^* : H_T^*(X) \hookrightarrow H_T^*(X^T)$$

est l'ensemble des éléments $(f_p)_{p \in X^T}$ qui vérifient la propriété suivante : si deux points fixes a et b se trouvent dans l'adhérence d'une T-orbite E de dimension 1, les polynômes f_a et f_b coïncident sur l'hyperplan $\mathfrak{t}_x \subset \mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}_x = \mathrm{Lie}(T_x)$,

$$f_a|_{\mathfrak{t}_x} = f_b|_{\mathfrak{t}_x}$$

où $x \in E$ et $T_x = \mathrm{Stab}_T(x)$ est le type de l'orbite E.

Si $\lambda : T \to T/T_x \simeq \mathbb{C}^*$ est le caractère par l'intermédiaire duquel T agit sur l'orbite E alors $\mathfrak{t}_x = \mathrm{Ker}\, d\lambda$, c'est-à-dire que la différentielle $d\lambda \in \mathfrak{t}^*$ que l'on voit comme polynôme de degré 1 sur $\mathfrak{t}$ est une équation de l'hyperplan $\mathfrak{t}_x \subset \mathfrak{t}$. On peut donc remplacer la condition $f_a|_{\mathfrak{t}_x} = f_b|_{\mathfrak{t}_x}$ de l'énoncé du théorème par

$$d\lambda \mid f_a - f_b.$$

Notons aussi que $\pm d\lambda$ est le poids avec lequel $\mathfrak{t}$ agit sur la droite tangente $T_a\overline{E} \subset T_aX$ (et $\mathfrak{t}$ agit avec le poids $\mp d\lambda$ sur la droite tangente $T_b\overline{E} \subset T_bX$).

Définition 5.1.7. Le *graphe GKM* de X est le graphe dont les sommets sont en bijection avec les T-points fixes de X et où l'on relie deux sommets par une arête si et seulement si les deux points fixes correspondants sont dans l'adhérence d'une T-orbite de dimension 1. De plus, on assigne à chaque arête un polynôme de degré 1 qui est une équation pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{t}_x$ du stabilisateur T_x de l'orbite de dimension 1 correspondante.

Le théorème précédent reconstitue donc l'anneau de cohomologie équivariante $H_T^*(X)$ à partir du graphe GKM de la variété X.

Exemple 5.1.8. L'exemple non trivial le plus simple de graphe GKM est le graphe GKM de $\mathbb{P}^1$ où T agit via un caractère λ :

$$0 \overset{d\lambda}{\text{———}} \infty$$

Remarque 5.1.9. Le théorème de Goresky, Kottwitz et MacPherson identifie l'anneau $H_T^*(X)$ à l'algèbre des fonctions régulières sur une variété obtenue à partir de $|X^T|$ copies disjointes de l'espace affine $\mathfrak{t}$ en recollant deux copies correspondant aux points fixes a et b le long de l'hyperplan $\operatorname{Ker}\ell$ si a et b sont reliés dans le graphe GKM par une arête marquée $\ell \in \mathfrak{t}^*$. Nous désignons, suivant [Bri98, §2], cette variété par $V(X)$; nous allons voir un exemple explicite de telle variété dans la section suivante.

5.2 Le graphe GKM et l'anneau de cohomologie équivariante de la variété $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$

Comme dans le chapitre troisième nous allons regarder ici la variété de drapeaux symplectiques impaire $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ comme sous-variété de Schubert de la variété de drapeaux symplectiques $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$:

$$\mathbb{F}_\omega(2n+1) = \{V_\bullet = (V_1 \subset \cdots \subset V_{n+1}) \mid V_{n+1} \subset e_0^\perp\} \subset \mathbb{F}_\omega(2n+2).$$

Puisque la variété $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ est un fermé T-stable de $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$, ses T-points fixes et ses T-orbites de dimension 1 se trouvent parmi les T-points fixes, respectivement les T-orbites de dimension 1 de $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$; le graphe GKM de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ est donc un sous-graphe partiel du graphe GKM de $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$.[2] Pour décrire ce dernier, plaçons-nous dans le cadre plus général d'une variété de drapeaux généralisée G/B d'un groupe semi-simple complexe G, dont $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$ est un cas particulier. Le graphe GKM de la variété de drapeaux G/B pour l'action d'un tore maximal $T \subset G$ est le suivant (cf. [Bri98, §2]) : les sommets sont en bijection avec le groupe de Weyl $W = N_G(T)/T$ de G ; si Δ est le système de racines de G, pour toute racine $\alpha \in \Delta$ et tout élément $w \in W$ les sommets w et $\sigma_\alpha w$ – où σ_α est la réflexion associée à α – sont reliés par une arête qui est marquée par le polynôme de degré 1 $\alpha \in \mathfrak{t}^*$.

Alors, si $S = H_T^*(pt) = \mathbb{C}[\mathfrak{t}]$ désigne la cohomologie équivariante du point, on déduit par le théorème de Goresky, Kottwitz et MacPherson que l'anneau de cohomologie équivariante de la variété de drapeaux G/B est

$$H_T^*(G/B) = \Big\{(f_w)_{w\in W} \,\big|\, f_w \in S,\ f_{\sigma_\alpha w} \equiv f_w \bmod \alpha,\ \text{pour tout } \alpha \in \Delta \text{ et } w \in W\Big\}. \tag{5.5}$$

Le graphe GKM de toute sous-variété T-stable de G/B est un sous-graphe partiel du graphe GKM de G/B ; pour une sous-variété de Schubert X_w, le graphe GKM est en fait un

[2] C'est-à-dire que les sommets et les arêtes du graphe GKM de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ se trouvent parmi celles du graphe GKM de $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$.

sous-graphe (et pas seulement un sous-graphe partiel) du graphe GKM de G/B, c'est-à-dire que si deux sommets du graphe GKM de X_w sont reliés par une arête dans le graphe GKM de G/B alors ils le sont aussi dans le graphe GKM de X_w. Autrement dit, si deux T-points fixes de X_w sont dans l'adhérence d'une T-orbite de dimension 1 alors cette orbite est contenue dans X_w ; vérifions ceci.

Nous introduisons des notations qui nous seront utiles également dans le reste du chapitre. Soit $U \subset B$ le sous-groupe unipotent maximal de B et U^- son sous-groupe opposé ; les racines positives $\Delta_+ \subset \Delta$ sont les T-poids de $\mathrm{Lie}(U)$. Pour $w \in W$ un élément du groupe de Weyl nous notons

$$\begin{aligned} U_w &= U \cap wUw^{-1} \\ U'_w &= U \cap wU^-w^{-1}, \end{aligned}$$

ce sont des sous-groupes normalisés par T. Pour $\alpha \in \Delta$ une racine notons $\mathfrak{g}_\alpha$ l'espace propre correspondant dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G et $U_\alpha \subset G$ le sous-groupe connexe unipotent de dimension 1 dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g}_\alpha$. Le sous-groupe U_α est isomorphe en tant que T-espace à son algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\alpha$, c'est-à-dire au T-module $\mathbb{C}_\alpha$ de dimension 1 de poids α. Tout sous-groupe fermé T-stable de U est directement engendré[3] par les U_α qu'il contient, pris dans un ordre arbitraire (cf. [Hum75, 28.1]) ; en particulier $U = U_wU'_w = U'_wU_w$ puisque par la définition

$$\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathrm{Lie}(U_w) \iff \alpha > 0 \text{ et } w^{-1}(\alpha) > 0 \tag{5.6}$$

$$\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathrm{Lie}(U'_w) \iff \alpha > 0 \text{ et } w^{-1}(\alpha) < 0 \tag{5.7}$$

donc $\mathrm{Lie}(U_w) \oplus \mathrm{Lie}(U'_w) = \mathrm{Lie}(U)$.

Par la forme normale de la décomposition de Bruhat (cf. Humphreys [Hum75, 28.4]) tout élément $g \in G$ qui appartient à la $B \times B$-orbite $BwB \subset G$ s'écrit de manière unique sous la forme $g = u'wb$ où w est sous-entendu être un représentant fixé de l'élément w du groupe de Weyl W, $u' \in U'_w$, $b \in B$. L'application $u' \mapsto u'wB$ est donc un isomorphisme T-équivariant de U'_w sur la B-orbite BwB/B du T-point fixe $wB \in G/B$, c'est-à-dire sur la cellule de Schubert C_w. Or le sous-groupe U'_w est directement engendré par les U_α qu'il contient, il est donc isomorphe en tant que T-espace à son algèbre de Lie ; dans cet isomorphisme, $1 \in U'_w$ correspond à l'origine $0 \in \mathrm{Lie}(U'_w)$. Il résulte en particulier que les T-orbites de dimension 1 de la cellule de Schubert C_w sont celles qui correspondent aux espaces propres $\mathfrak{g}_\alpha$ de $\mathrm{Lie}(U'_w)$, et elles ont toutes dans leur adhérence le T-point fixe $wB \in C_w$.

On déduit donc que le graphe GKM de toute sous-variété de Schubert de G/B est un sous-graphe du graphe GKM de G/B ; en particulier, le graphe GKM de la variété de drapeaux symplectiques impaire $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ est le sous-graphe du graphe GKM de la variété de drapeaux symplectiques $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$ dont les sommets sont les éléments de $W(\mathrm{Sp}_{2n+1}) \subset W(\mathrm{Sp}_{2n+2})$, c'est-à-dire les permutation signées qui ne contiennent pas $\bar{0}$ (cf. la proposition 3.2.6).

5.2.1. La variété algébrique $V(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$ dont l'algèbre des fonctions régulières est l'anneau de cohomologie équivariante $H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$ (cf. la remarque 5.1.9) peut être réalisée explicitement comme fermé d'un espace affine.

[3]Un groupe algébrique H est directement engendré par ses sous-groupes $H_1, \ldots, H_m$ si et seulement si le morphisme produit $H_1 \times \cdots \times H_m \to H$ est un isomorphisme de variétés algébriques.

En effet, dans le cas plus général de G/B on démontre indépendamment du théorème GKM que

$$H_T^*(G/B) \simeq S \otimes_{S^W} S$$

où $S^W \subset S$ est l'anneau des invariants du groupe de Weyl W (cf. [Bri98, proposition 1]). Cet isomorphisme est un relèvement à la cohomologie équivariante de la *présentation de Borel* de la cohomologie ordinaire de la variété de drapeaux

$$H^*(G/B) \simeq S/(S_+^W).$$

L'anneau $S \otimes_{S^W} S$ est l'algèbre des fonctions régulières du produit fibré

$$\mathfrak{t} \times_{\mathfrak{t}/W} \mathfrak{t} = \{(x,y) \in \mathfrak{t} \times \mathfrak{t} \mid Wx = Wy\} = V(G/B)$$

qui s'identifie donc au graphe de la relation d'équivalence définie par l'action de W sur $\mathfrak{t}$: $(x,y) \in V(G/B)$ si et seulement si x et y sont conjugués par W. Notons aussi que $V(G/B)$ est obtenue en recollant $|W|$ copies de $\mathfrak{t}$ le long des hyperplans de réflexion selon les relations d'incidence dans le graphe GKM : si $\Gamma_w = \{(x, w(x)) \mid x \in \mathfrak{t}\}$ est le graphe de w alors

$$V(G/B) = \bigcup_{w \in W} \Gamma_w,$$

$\Gamma_w \subset \mathfrak{t} \times \mathfrak{t}$ s'identifie à $\mathfrak{t}$ via la deuxième projection, et $\Gamma_w \cap \Gamma_{\sigma_\alpha w}$ s'identifie a l'hyperplan $\alpha^\perp$. La restriction au point fixe w, $H_T^*(G/B) \to H_T^*(w) = S$ correspond à la restriction au fermé $\Gamma_w \subset V(G/B)$,

$$\mathbb{C}[V(G/B)] \longrightarrow \mathbb{C}[\Gamma_w] = \mathbb{C}[\mathfrak{t}] = S$$

et, pour un élément $P \otimes Q \in S \otimes_{S^W} S \simeq H_T^*(G/B)$ on a alors

$$(P \otimes Q)|_w = w(P)Q; \tag{5.8}$$

notons que le morphisme $S \simeq 1 \otimes S \to H_T^*(G/B)$ est le morphisme qui définit la structure de S-module de $H_T^*(G/B)$.

En appliquant cette discussion au cas particulier où $G = \mathrm{Sp}_{2n+2}$ on obtient

$$H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+2)) \simeq S \otimes_{S^{W(\mathrm{Sp}_{2n+2})}} S \simeq \mathbb{C}[V(\mathbb{F}_\omega(2n+2))],$$

où

$$V(\mathbb{F}_\omega(2n+2)) = \bigcup_{w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+2})} \Gamma_w \subset \mathfrak{t} \times \mathfrak{t}.$$

Comme le graphe GKM de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ est le sous-graphe sur les sommets $W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ du graphe GKM de $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$, on déduit que $H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1)) = \mathbb{C}[V(\mathbb{F}_\omega(2n+1))]$ où

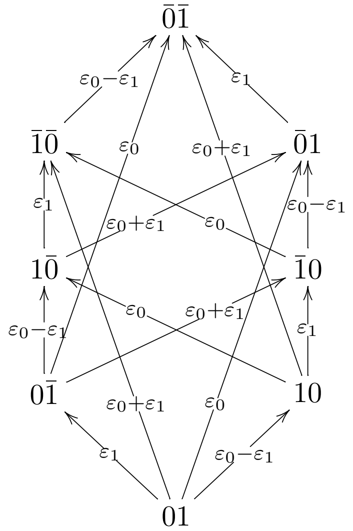
$$V(\mathbb{F}_\omega(2n+1)) = \bigcup_{w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})} \Gamma_w \subset V(\mathbb{F}_\omega(2n+1)).$$

En particulier $V(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$ est un fermé de $V(\mathbb{F}_\omega(2n+2))$, donc le morphisme de restriction

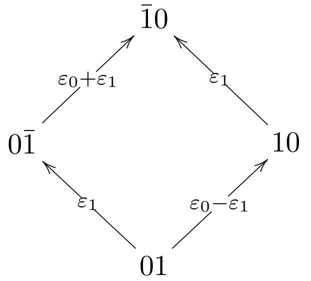
$$H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+2)) \longrightarrow H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$$

est surjectif.

Exemple 5.2.2. Pour $n = 1$, le graphe GKM de la variété de drapeaux symplectiques $\mathbb{F}_\omega(2n+2) = \mathbb{F}_\omega(4)$ est le suivant[4] :



Le graphe GKM de la variété de drapeaux symplectiques impaire $\mathbb{F}_\omega(2n+1) = \mathbb{F}_\omega(3)$ est le sous-graphe de sommets $W(\mathrm{Sp}_3) = \{01, 10, 0\bar{1}, \bar{1}0\}$ c'est-à-dire :



Remarque 5.2.3. Si l'on oublie les polynômes linéaires qui marquent les arêtes, le graphe GKM de la variété de drapeaux symplectiques $\mathbb{F}_\omega(4)$ est un octogone où l'on trace les diagonales qui relient chaque sommet au troisième sommet qui lui succède lorsque l'on parcourt la circonférence dans l'un des deux sens, arbitrairement.

En général, le graphe GKM de la variété de drapeaux symplectiques $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$ a

$$|W(\mathrm{Sp}_{2n+2})| = (n+1)! \cdot 2^{n+1}$$

sommets, et de chaque sommet partent $|\Delta_+(\mathrm{Sp}_{2n+2})| = \dim \mathbb{F}_\omega(2n+2) = (n+1)^2$ arêtes, c'est donc un graphe $(n+1)^2$-régulier.

Proposition 5.2.4. *Le graphe GKM de la variété de drapeaux symplectiques impaire* $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ *a* $|W(\mathrm{Sp}_{2n+1})| = (n+1)! \cdot 2^n$ *sommets et est un graphe* $n(n+1)$*-régulier, c'est-à-dire que de chaque sommet partent* $n(n+1)$ *arêtes.*

PREUVE. Puisque les éléments de $W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ sont les permutations signées qui ne contiennent pas $\bar{0}$, il est clair que

$$|W(\mathrm{Sp}_{2n+1})| = \frac{1}{2}|W(\mathrm{Sp}_{2n+2})| = (n+1)! \cdot 2^n.$$

[4] Les flèches indiquent l'ordre de Bruhat ; voir ci-dessous.

Soit maintenant $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$; les arêtes qui relient w à un sommet de $W(\mathrm{Sp}_{2n+2})$ situé en dehors de $W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ sont en bijection avec les racines positives α telles que $\sigma_\alpha w \notin W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$, c'est-à-dire telles que $\sigma_\alpha w$ contient $\bar{0}$; ces racines sont précisément les suivantes :

$2\varepsilon_0$,
$\varepsilon_0 - \varepsilon_i$ si w contient $\bar{\imath}$,
$\varepsilon_0 + \varepsilon_i$ si w contient i,

il y en a donc $n+1$, une pour chaque lettre de w. Il résulte que parmi les $(n+1)^2$ arêtes qui partent du sommet w dans le graphe GKM de $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$, $(n+1)^2 - (n+1) = n(n+1)$ arêtes relient w à des sommets situés dans $W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$; ce sont toutes les arêtes du graphe GKM de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ qui ont une extrémité en w. ∎

Le premier obstacle à la compréhension de ces graphes est leur complexité très rapidement croissante : ainsi pour $n = 1$, comme le montre l'exemple précédent, la situation est très simple et ne laisse pas entrevoir les propriétés générales de l'anneau $H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$; en même temps, pour $n = 2$ le graphe GKM de $\mathbb{F}_\omega(5)$ est déjà un objet nettement plus compliqué puisqu'il a 24 sommets et 72 arêtes. Ceci rend difficiles les tentatives d'étude de $H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$ en partant des cas particuliers pour n petit.

La proposition 5.2.5 ci-dessous nous éclaire en quelque mesure sur la structure du graphe GKM de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$; avant de l'énoncer, nous rassemblons encore quelques fait généraux sur le groupe de Weyl d'un groupe semi-simple complexe.

Il résulte de la discussion qui précède l'exemple 5.2.2 la caractérisation suivante : si $\alpha \in \Delta_+$ est une racine positive et $w \in W$ un élément du groupe de Weyl alors

$$\sigma_\alpha w < w \iff w^{-1}(\alpha) < 0 \tag{5.9}$$

où $<$ désigne l'ordre de Bruhat sur W : $w \leqslant w'$ si et seulement si $X_w \subset X_{w'}$. Rappelons qu'une définition équivalente de cet ordre est la suivante : w précède w' dans l'ordre de Bruhat, et l'on écrit $w \to w'$, si et seulement s'il existe $\alpha \in \Delta_+$ une racine positive telle que $w' = \sigma_\alpha w$ et $\ell(w') = \ell(w) + 1$, où ℓ désigne la longueur ; alors $w \leqslant w'$ si et seulement s'il existe une chaîne d'éléments de W

$$w = w_1 \to w_2 \to \cdots \to w_d = w'$$

où chaque terme précède le suivant.

Le graphe de Bruhat de G/B, qui est le graphe dont les sommets sont les éléments du groupe de Weyl W et où l'on relie deux sommets si et seulement si l'un précède l'autre dans l'ordre de Bruhat, est donc un graphe partiel du graphe GKM de G/B.

Notons aussi que si α est une racine alors

$$\sigma_\alpha w = w w^{-1} \sigma_\alpha w = w \sigma_{w^{-1}(\alpha)}$$

donc dans la définition de l'ordre de Bruhat on peut remplacer les multiplications à gauche par des réflexions, par des multiplications à droite. En particulier, il résulte que

$$\forall w, w' \in W \ : \qquad w \leqslant w' \iff w^{-1} \leqslant w'^{-1},$$

et l'analogue de (5.9) est : si $\alpha \in \Delta_+$ est une racine positive

$$w\sigma_\alpha < w \iff w(\alpha) < 0. \tag{5.10}$$

Le sous-ensemble $W(\mathrm{Sp}_{2n+1}) \subset W(\mathrm{Sp}_{2n+2})$ est stable par multiplication à gauche par $W(\mathrm{Sp}_{2n})$, où l'on identifie $W(\mathrm{Sp}_{2n})$ au sous-groupe des éléments de $W(\mathrm{Sp}_{2n+2})$ qui fixent 0[5]. Les orbites de $W(\mathrm{Sp}_{2n})$ dans $W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ sont les classes

$$\{w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+2}) \mid w(i) = 0\}, \qquad 0 \leqslant i \leqslant n\ ;$$

une telle classe rassemble donc les permutations signées qui en notation en ligne ont la lettre 0 à la même position.

Pour chaque $0 \leqslant i \leqslant n$, une bijection évidente

$$f_i : \{w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+2}) \mid w(i-1) = 0\} \xrightarrow{\simeq} \{w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+2}) \mid w(i) = 0\}$$

est la multiplication à droite par $\sigma_{\varepsilon_{i-1}-\varepsilon_i}$ qui agit en échangeant les lettres situées aux positions i et $i-1$.

Proposition 5.2.5. *La bijection f_i ci-dessus a la propriété suivante : pour tout élément $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ tel que $w(i-1) = 0$ on a $\ell(f_i(w)) = \ell(w) + 1$.*

PREUVE. Il s'agit donc de montrer que pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$ et pour tout

$$w \in W(\mathrm{Sp}_{2n})\sigma_{\varepsilon_0-\varepsilon_1} \ldots \sigma_{\varepsilon_{i-2}-\varepsilon_{i-1}} = \{w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+2}) \mid w(i-1) = 0\}$$

on a $\ell(w\sigma_{\varepsilon_{i-1}-\varepsilon_i}) = \ell(w) + 1$. Comme $\sigma_{\varepsilon_{i-1}-\varepsilon_i}$ est une réflexion simple, il suffit de montrer que $w\sigma_{\varepsilon_{i-1}-\varepsilon_i} > w$ et par l'équivalence (5.10) ceci revient à $w(\varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i) > 0$. Soit donc

$$w = w'\sigma_{\varepsilon_0-\varepsilon_1} \ldots \sigma_{\varepsilon_{i-2}-\varepsilon_{i-1}} \in W(\mathrm{Sp}_{2n})\sigma_{\varepsilon_0-\varepsilon_1} \ldots \sigma_{\varepsilon_{i-2}-\varepsilon_{i-1}},$$

$w' \in W(\mathrm{Sp}_{2n})$, on a $w(\varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i) = w'(\varepsilon_0) - w'(\varepsilon_i) = \varepsilon_0 \pm \varepsilon_j$ qui est une racine positive, ce qui achève la preuve. ■

On obtient donc tous les éléments de $W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ à partir des éléments de $W(\mathrm{Sp}_{2n})$ par translations successives à droite par les réflexions $\sigma_{\varepsilon_0-\varepsilon_1}, \ldots, \sigma_{\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n}$, chaque translation augmentant la longueur de 1. De plus, les multiplications à droite commutent avec les multiplications à gauche, donc si deux éléments w et w' de la classe $W(\mathrm{Sp}_{2n})\sigma_{\varepsilon_0-\varepsilon_1} \ldots \sigma_{\varepsilon_{i-2}-\varepsilon_{i-1}}$ sont reliés dans le graphe GKM par une arête marquée α alors il en est de même pour leurs translatés $w\sigma_{\varepsilon_{i-1}-\varepsilon_i}$, $w'\sigma_{\varepsilon_{i-1}-\varepsilon_i}$:

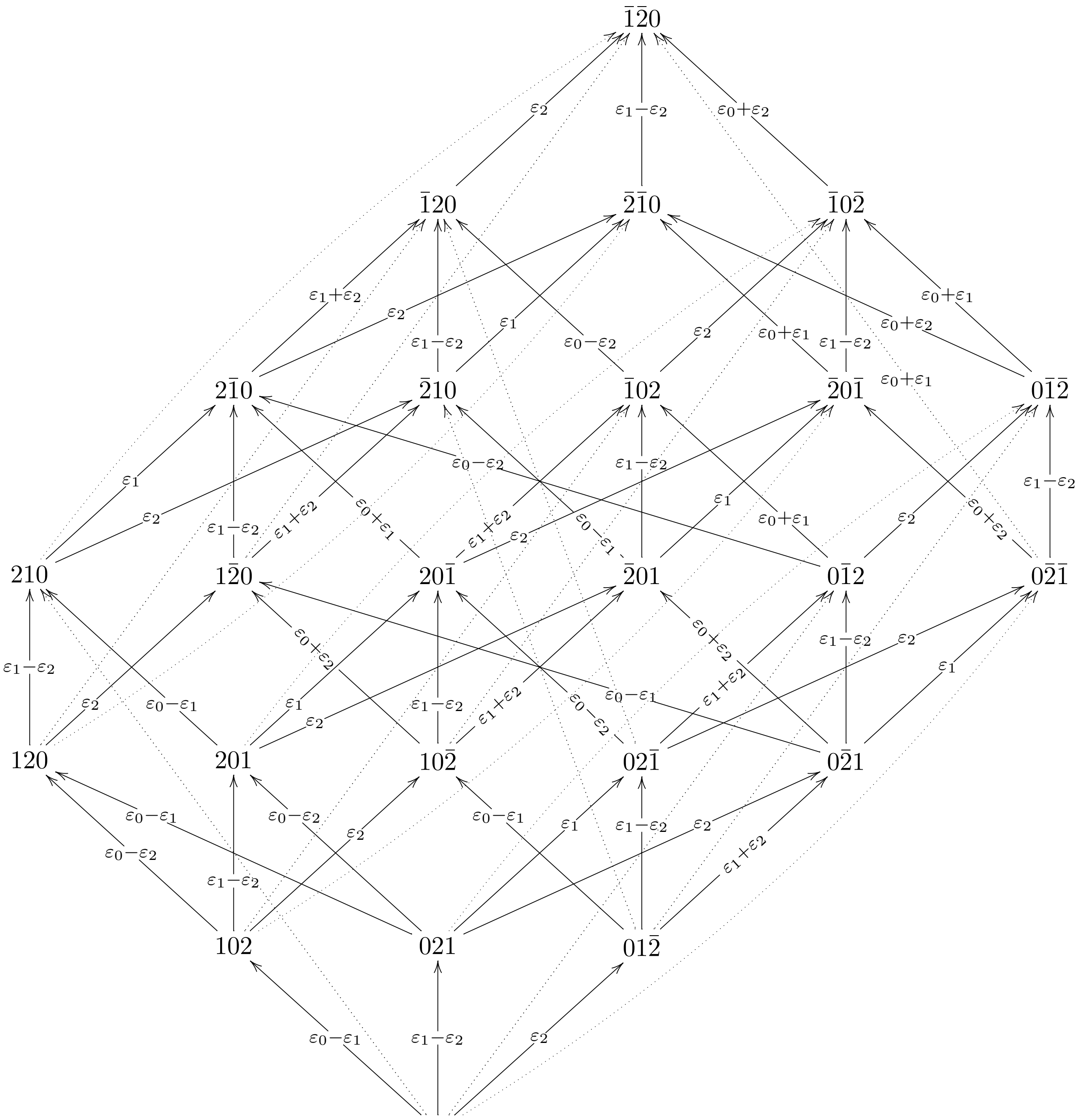
$$\begin{tikzcd}
& w'\sigma_{\varepsilon_{i-1}-\varepsilon_i} & \\
w\sigma_{\varepsilon_{i-1}-\varepsilon_i} \arrow[ur, "\alpha"] & & w' \arrow[ul, "w'(\varepsilon_{i-1}-\varepsilon_i)"'] \\
& w \arrow[ul, "w(\varepsilon_{i-1}-\varepsilon_i)"] \arrow[ur, "\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

[5] Rappelons que $W(\mathrm{Sp}_{2n})$ est également le groupe de Weyl du groupe symplectique impair Sp_{2n+1} (cf. la proposition 1.1.9).

Remarque 5.2.6. Rappelons que les éléments de la classe $\{w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1}) \mid w(i-1) = 0\}$ sont précisément les T-points fixes de la Sp_{2n+1}-orbite $\mathcal{O}_i$ (cf. la remarque 3.2.11 et la proposition 3.1.6).

Remarque 5.2.7. Étant données deux classes $W(\mathrm{Sp}_{2n})w$ et $W(\mathrm{Sp}_{2n})w'$ dans $W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$, tout élément de $W(\mathrm{Sp}_{2n})w$ est relié dans le graphe GKM à un unique élément de $W(\mathrm{Sp}_{2n})w'$, mais en général ces deux éléments ne sont pas de longueurs consécutives.

Exemple 5.2.8. Le graphe GKM de la variété de drapeaux symplectiques impaire $\mathbb{F}_\omega(5)$ est le suivant :



5.2.9. La proposition 5.2.5 permet de déterminer facilement les diviseurs de Schubert de

$\mathbb{F}_\omega(2n+1)$. En effet, on cherche les éléments $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ tels que $\ell(w) = \ell(w_0) - 1$; si $w_0' = 0\bar{1}\dots\bar{n}$ est le plus grand élément de $W(\mathrm{Sp}_{2n})$ et $w_0 = \bar{1}\bar{2}\dots\bar{n}0$ est le plus grand élément de $W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$, alors ceux-ci sont les

$$\sigma_\alpha w_0' \sigma_{\varepsilon_0-\varepsilon_1} \dots \sigma_{\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n} = \sigma_\alpha w_0$$

où α est une racine simple de Sp_{2n}, et

$$w_0'\sigma_{\varepsilon_0-\varepsilon_1} \dots \sigma_{\varepsilon_{n-2}-\varepsilon_{n-1}} = w_0\sigma_{\varepsilon_n-\varepsilon_{n-1}} = \sigma_{\varepsilon_0+\varepsilon_n} w_0.$$

Nous allons utiliser les notations :

Notation 5.2.10. On note $\mathrm{div}_i = \sigma_{\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}} w_0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, respectivement $\mathrm{div}_n = \sigma_{2\varepsilon_n} w_0$ et $\mathrm{div}_{n+1} = \sigma_{\varepsilon_0+\varepsilon_n} w_0$.

En notation en ligne on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}_1 &= \bar{2}\bar{1}\bar{3}\dots\bar{n}0 \\
&\dots \\
\mathrm{div}_i &= \bar{1}\dots\overline{i-1}\,\overline{i+1}\,\bar{i}\,\overline{i+2}\dots\bar{n}0 \\
&\dots \\
\mathrm{div}_{n-1} &= \bar{1}\dots\overline{n-2}\,\bar{n}\,\overline{n-1}0 \\
\mathrm{div}_n &= \bar{1}\dots\overline{n-1}\,n0 \\
\mathrm{div}_{n+1} &= \bar{1}\dots\overline{n-1}\,0\bar{n}.
\end{aligned}$$

En utilisant la proposition 3.2.14 on obtient les descriptions géométriques suivantes pour les diviseurs de Schubert $X_{\mathrm{div}_1}, \dots, X_{\mathrm{div}_{n+1}}$ de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$:

Proposition 5.2.11. *Notons $E_\bullet = (E_1 \subset \cdots \subset E_{2n+1})$ le drapeau de référence, $E_i = \langle e_0, \dots, e_{i-1}\rangle$, $1 \leqslant i \leqslant 2n+1$. Les diviseurs de Schubert de la variété de drapeaux symplectiques impaire $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ sont :*

$$\begin{aligned}
X_{\mathrm{div}_i} &= \{V_\bullet = (V_1 \subset \cdots \subset V_{n+1}) \in \mathbb{F}_\omega(2n+1) \mid V_i \cap E_{2n+1-i} \neq (0)\}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1; \\
X_{\mathrm{div}_n} &= \{V_\bullet = (V_1 \subset \cdots \subset V_{n+1}) \in \mathbb{F}_\omega(2n+1) \mid \dim(V_{n+1} \cap E_{n+1}) \geqslant 2\} \\
X_{\mathrm{div}_{n+1}} &= \{V_\bullet = (V_1 \subset \cdots \subset V_{n+1}) \in \mathbb{F}_\omega(2n+1) \mid e_0 \in V_n\}.
\end{aligned}$$

En particulier, $X_{\mathrm{div}_{n+1}}$ est le diviseur Sp_{2n+1}-stable, complémentaire de la Sp_{2n+1}-orbite ouverte de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ (cf. la remarque 3.1.8).

En comparant avec la description analogue du diviseur de Schubert d'une grassmannienne symplectique impaire (cf. la proposition 2.2.21) on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 5.2.12. *Si $\pi_k : \mathbb{F}_\omega(2n+1) \to G_\omega(k, 2n+1)$ est la projection $(V_1 \subset \cdots \subset V_{n+1}) \mapsto V_k$ alors*

$$\begin{aligned}
X_{\mathrm{div}_i} &= \pi_i^{-1}(X_{\mathbf{div}}), \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1, \\
X_{\mathrm{div}_n} &= \pi_{n+1}^{-1}(X_{\mathbf{div}}).
\end{aligned}$$

où $X_{\mathbf{div}} = X_{\mathbf{div}_{k,2n+1}}$ désigne le diviseur de Schubert de la grassmannienne symplectique impaire $G_\omega(k, 2n+1)$ (cf. 2.2.4).

5.3 Classes de Schubert équivariantes

5.3.1 Généralités

Les classes fondamentales des sous-variétés de Schubert de la variété de drapeaux symplectiques impaire $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ forment une base de l'anneau de cohomologie $H^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1), \mathbb{Q})$; un phénomène similaire a lieu pour la cohomologie équivariante, ce que nous allons voir dans cette section : puisque les sous-variétés de Schubert sont T-stables, elles définissent des classes dans l'anneau de cohomologie équivariante $H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1), \mathbb{Q})$ qui relèvent les classes fondamentales ordinaires et forment une base de $H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1), \mathbb{Q})$ comme module sur l'anneau $H_T^*(pt)$.

Pour définir la classe équivariante d'une sous-variété T-stable Y d'une T-variété lisse X, nous nous servons de l'existence des morphismes de Gysin en cohomologie équivariante.[6] Rappelons d'abord le cas non équivariant ; nos références sont les articles de Atiyah et Bott [AB84] et d'Arabia [Ara98]. Soit $Y \subset X$ une sous-variété lisse de codimension complexe d d'une variété projective lisse X ; notons $i : Y \hookrightarrow X$ l'inclusion. On a l'isomorphisme de Thom

$$\Phi_Y : H^*(Y) \xrightarrow{\simeq} H^{*+2d}(X, X \setminus Y)$$

dont la composition avec l'application canonique

$$H^*(X, X \setminus Y) \longrightarrow H^*(X)$$

induite par l'inclusion $(X, \varnothing) \hookrightarrow (X, X \setminus Y)$ est le morphisme de Gysin

$$i_* : H^*(Y) \longrightarrow H^{*+2d}(X).$$

Alors $i_*1 \in H^{2d}(X)$ est la classe fondamentale de Y dans X ; l'élément $\Phi_Y 1 \in H^{2d}(X, X \setminus Y)$ est la classe de Thom $\tau(Y, X)$ dont la restriction à Y est la classe d'Euler $e(Y, X) = \tau(Y, X)|_Y$. On a donc le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H^{*+2d}(X, X \setminus Y) \arrow[r] & H^{*+2d}(X) \arrow[d, "i^*"] \\
H^*(Y) \arrow[u, "\simeq"', "\Phi_Y"] \arrow[ur, "i_*"] \arrow[r, "\cdot e(Y,X)"] & H^{*+2d}(Y)
\end{tikzcd}$$

d'où $i^* i_* 1 = e(Y, X)$ et donc la flèche $H^*(Y) \to H^{*+2d}(Y)$, étant un morphisme de $H^*(Y)$-modules, est la multiplication par la classe d'Euler.

Lorsque X est munie d'une T-action et Y est une sous-variété T-stable, l'inclusion T-équivariante $i : Y \hookrightarrow X$ induit une inclusion $i_T : Y \times_T ET \hookrightarrow X \times_T ET$ et la construction précédente s'étend à i_T (cf. [AB84, §2]) et l'on obtient ainsi l'isomorphisme de Thom équivariant $\Phi_{Y,T}$, le morphisme de Gysin équivariant $i_{*,T}$, la classe d'Euler équivariante $e_T(Y, X)$

[6] D'autres approches existent, notamment l'une d'entre elles consiste à utiliser les approximations ET_m de la fibration universelle ET pour construire des classes $[Y]_{T,m}$ dans $H_T^* X \times_T ET_m$ qui définissent par passage à la limite la classe équivariante $[Y]_T$ dans $H_T^*(X)$.

qui interviennent dans un diagramme commutatif analogue au précédent :

$$\begin{tikzcd}
H_T^{*+2d}(X, X \setminus Y) \arrow[r] & H_T^{*+2d}(X) \arrow[d, "i^*"] \\
H_T^*(Y) \arrow[u, "\Phi_{Y,T}", "\simeq"'] \arrow[ur, "i_{*,T}"] \arrow[r, "\cdot e_T(Y,X)"] & H_T^{*+2d}(Y).
\end{tikzcd}$$

On définit alors la classe équivariante $[Y]_T$ de Y dans X comme étant

$$[Y]_T = i_{*,T} 1 \in H_T^{2d}(X), \tag{5.11}$$

et, à nouveau, le morphisme de $H_T^*(Y)$-modules $i^* i_{*,T} : H_T^*(Y) \to H_T^{*+2d}(Y)$ est la multiplication par la classe d'Euler équivariante.

A. Arabia remarque dans [Ara98] que l'on peut affaiblir les hypothèses de la construction ci-dessus, à savoir il suffit que X soit lisse (même rationnellement lisse, mais pour nous ce raffinement n'est pas nécessaire) et que Y vérifie des conditions qui sont automatiquement satisfaites lorsque Y est une sous-variété algébrique de X (cf. [Ara98, Remarque 2.1-1 (a) et §2.2.1]). Nous posons donc la définition suivante :

Définition 5.3.1. Si Y est un fermé T-stable de codimension complexe d de la T-variété projective lisse X, alors la *classe équivariante* de Y dans X est

$$[Y]_T = i_{*,T} 1 \in H_T^{2d}(X)$$

où $i_{*,T}$ est le morphisme de Gysin équivariant défini par l'inclusion $i : Y \hookrightarrow X$.

Nous utiliserons dans la suite le lemme suivant :

Lemme 5.3.2. *Soit X une T-variété algébrique lisse et $Y \subset X$ un fermé T-stable de codimension complexe d. Soit $y \in Y^T$ un T-point fixe lisse de Y, alors la restriction $[Y]_T|_y$ est égale au produit des T-poids de l'espace normal de Y dans X au point x.*

PREUVE. Puisque y est dans Y, pour calculer $[Y]_T|_y$ on peut restreindre d'abord à Y donc on a $[Y]_T|_y = ([Y]_T|_Y)|_y = e_T(Y,X)|_y$. Considérons d'abord le cas où Y est lisse. Dans le cas non équivariant Y possède un voisinage tubulaire qui s'identifie au fibré normal $N_{Y/X}$ de Y dans X. Par excision, on a alors un isomorphisme $H^*(X, X \setminus Y) \simeq H^*(N_{Y/X}, N_{Y/X} \setminus Y)$ et la classe d'Euler $e(Y,X)$ de Y dans X s'identifie à la classe d'Euler $e(N_{Y/X})$ de $N_{Y/X}$; cette dernière coïncide avec la classe de Chern de degré maximum $c_d(N_{Y/X})$ du fibré normal $N_{Y/X}$ (cf. [MS74, §14]).

Ceci s'étend au cas équivariant (avec la remarque que l'on devrait se restreindre au tore compact maximal de T – ce qui ne change pas la cohomologie équivariante – pour disposer d'un voisinage tubulaire équivariant ; cf [Bre72, VI.2.2]) la classe d'Euler équivariante de Y dans X est égale à la classe d'Euler équivariante du fibré normal $N_{Y/X}$ qui coïncide avec la classe de Chern équivariante $c_{d,T}(N_{Y/X})$; on a donc $[Y]_T|_y = e_T(Y/X)|_y = c_{d,T}(N_{Y/X})|_y = c_{d,T}(N_{Y/X}|_y)$. L'espace normal $N_{Y/X}|_y$ de Y dans X au point y, que l'on voit donc comme fibré vectoriel de base le point y, se décompose en T-sous-modules de dimension 1

$$N_{Y/X}|_y = \bigoplus_\lambda \mathbb{C}_\lambda,$$

on a donc $c_{d,T}(N_{Y/X}|_y) = \prod_\lambda c_{1,T}(\mathbb{C}_\lambda) = \prod_\lambda \lambda$, la dernière égalité provenant de l'isomorphisme caractéristique $H_T^*(pt) \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{t}] = S$.

Le cas général où Y est singulière mais $y \in Y$ est un point lisse se réduit au précédent par la remarque que $e_T(Y,X)|_y$ est une quantité locale en y, plus précisément on a $e_T(Y,X)|_y = e_T(U_y, V_y)$ (cf. [Ara98, §2.2.1]) où $U_y \subset Y$, $V_y \subset X$ sont des voisinages coniques lisses T-stables[7]. ■

Revenons aux variétés $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ et $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$; nous allons utiliser les notations suivantes :

Notation 5.3.3. Si $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ est un T-point fixe de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ nous notons $S_w \in H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$ la classe équivariante de la sous-variété de Schubert $X_w \subset \mathbb{F}_\omega(2n+1)$; si $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+2})$ est un T-point fixe de $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$ nous notons $\tilde{S}_w \in H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+2))$ la classe équivariante de la sous-variété de Schubert $X_w \subset \mathbb{F}_\omega(2n+2)$.

En suivant Knutson et Tao dans [KT03] nous donnons maintenant des conditions algébriques qui caractérisent les classes S_w et $\tilde{S}_w$ dans le contexte du théorème de Goresky, Kottwitz et MacPherson. Nous introduisons encore une notation et une définition :

Notation 5.3.4. Si $w \in W$ est un élément du groupe de Weyl W d'un groupe semi-simple complexe, nous notons $W_{\leqslant w}$ l'intervalle pour l'ordre de Bruhat $[1,w] = \{w' \in W \mid w' \leqslant w\}$; de même, nous notons $W_{<w}$ l'intervalle ouvert $[1,w[\, = W_{\leqslant w} \setminus \{w\}$. Nous utilisons ces notations sans ambiguïté aussi pour $W = W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ même si ce dernier n'est pas un groupe de Weyl.

Définition 5.3.5. Soit X un T-espace qui vérifie les hypothèses du théorème GKM ; le *support* d'une classe $S \in H_T^*(X)$ est l'ensemble $\{p \in X^T \mid S|_p \neq 0\}$.

On a alors les caractérisations suivantes :

Proposition 5.3.6. *Soit $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+2})$, la classe $\tilde{S}_w \in H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+2))$ est l'unique élément qui vérifie les conditions suivantes :*

1. *pour chaque $w' \in W(\mathrm{Sp}_{2n+2})$, l'élément $\tilde{S}_w|_{w'} \in S$ est un polynôme homogène de degré $\dim \mathbb{F}_\omega(2n+2) - \dim X_w = (n+1)^2 - \ell(w)$;*
2. *le support de $\tilde{S}_w$ est inclus dans $W(\mathrm{Sp}_{2n+2})_{\leqslant w}$, c'est-à-dire $\tilde{S}_w|_{w'} = 0$ si $w' \nleqslant w$;*
3. *$\tilde{S}_w|_w$ est égal au produit des T-poids de l'espace normal de X_w dans $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$ au point w,*
$$\tilde{S}_w|_w = \prod_{\alpha>0,\, \sigma_\alpha w \nleqslant w} (-\alpha) = \prod_{\alpha>0,\, w^{-1}(\alpha)>0} (-\alpha). \qquad (5.12)$$

L'analogue pour $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ est :

Proposition 5.3.7. *Soit $w_0 = \bar{1}\bar{2}\ldots\bar{n}0$ le plus grand élément de $W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$; soit $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$, la classe $S_w \in H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+2))$ est l'unique élément qui vérifie les conditions suivantes :*

1. *pour chaque $w' \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$, l'élément $S_w|_{w'} \in S$ est un polynôme homogène de degré $\dim \mathbb{F}_\omega(2n+1) - \dim X_w = n(n+1) - \ell(w)$;*
2. *le support de S_w est inclus dans $W(\mathrm{Sp}_{2n+1})_{\leqslant w}$;*

[7]Qui sont contractiles de manière T-équivariante ce qui explique pourquoi $e_T(U_y, V_y) \in H_T^*(U_y) \simeq H_T^*(y)$.

3. *$S_w|_w$ est égal au produit des T-poids de l'espace normal de X_w dans $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ au point w,*
$$S_w|_w = \prod_{\substack{\alpha>0,\,\sigma_\alpha w\not\leqslant w\\ \sigma_\alpha w\in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})}} (-\alpha) = \prod_{\substack{\alpha>0,\,w^{-1}(\alpha)>0\\ \sigma_\alpha w\leqslant w_0}} (-\alpha). \tag{5.13}$$

Les démonstrations de ces propositions sont presque identiques, la seule différence apparaît dans la preuve des formules (5.12) et (5.13) ; nous donnons alors seulement la preuve de l'énoncé qui concerne $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ et nous signalons les modifications à faire dans le cas de $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$.

PREUVE DE LA PROPOSITION 5.3.7. Notons pour simplifier l'écriture $X = \mathbb{F}_\omega(2n+1)$; nous commençons par montrer que la classe S_w vérifie bien les trois propriétés de l'énoncé.

Par définition de la classe S_w, si d est la codimension de X_w dans X alors $S_w \in H_T^{2d}(X)$ et donc $S_w|_{w'} \in H_T^{2d}(pt)$; l'affirmation *1* résulte alors du fait que l'isomorphisme $\mathbb{C}[\mathfrak{t}] \to H_T^*(pt)$ double le degré.

Si $w' \not\leqslant w$ alors le T-point fixe w' est dans $X \setminus X_w$ et si j désigne l'inclusion de w' dans X alors l'assertion *2* découle du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H_T^{*+2d}(X, X\setminus X_w) \arrow[r] & H_T^{*+2d}(X) \arrow[r] \arrow[dr, "j^*"] & H_T^{*+2d}(X\setminus X_w) \arrow[d] \\ H_T^*(X_w) \arrow[u, "\simeq"', "\Phi_{X_w,T}"] \arrow[ur, "i_{*,T}"'] & & H_T^{*+2d}(\{w'\}). \end{tikzcd}$$

dont la ligne supérieure fait partie de la suite exacte longue de cohomologie équivariante associée à la paire $(X, X \setminus X_w)$, et dont le morphisme composé est nul.

Jusqu'ici la preuve s'applique également au cas $X = \mathbb{F}_\omega(2n+2)$ (si l'on remplace les classes S_w par $\tilde{S}_w$). Pour *3*, puisque w est lisse dans X_w, par le lemme 5.3.2 la restriction $S_w|_w$ est le produit des T-poids de l'espace normal de X_w dans $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ au point w. De même pour $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$, la restriction $\tilde{S}_w|_w$ est le produit des T-poids de l'espace normal de X_w dans $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$ au point w. L'espace tangent T_wX_w est engendré par les vecteurs tangents aux courbes T-invariantes passant par w et contenues dans X_w, leurs T-poids sont donc les racines $\alpha > 0$ telles que $w^{-1}(\alpha) < 0$ (cf. la formule (5.7)), c'est-à-dire les $\alpha \in \Delta_+ \cap w\Delta_-$. En particulier les T-poids de $T_{\tilde{w}_0}W_{\tilde{w}_0} = T_{\tilde{w}_0}\mathbb{F}_\omega(2n+2)$ sont les $\alpha \in \Delta_+ \cap \tilde{w}_0\Delta_- = \Delta_+$ donc les T-poids de l'espace tangent $T_w\mathbb{F}_\omega(2n+2)$ sont les $w\tilde{w}_0\Delta_+ = w\Delta_-$. On en déduit alors la formule (5.12). D'autre part, il est clair que pour $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$, le polynôme $S_w|_w$ divise $\tilde{S}_w|_w$ et leur rapport est le produit des T-poids de l'espace normal de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ dans $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$ au point w ; ceci implique alors la formule (5.13).

Montrons maintenant que les classes S_w et $\tilde{S}_w$ sont les seules à vérifier les propriétés *1*, *2*, *3* respectives ; nous donnons la démonstration pour $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$, celle pour $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$ est identique. Supposons donc que $P \in H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$ est une autre classe qui vérifie les trois conditions de l'énoncé. Alors $S_w|_w = P|_w$ et donc $S_w - P$ a son support dans $W_{<w}$. Soit w' de longueur maximum dans le support de $S_w - P$; si α est une racine telle que $\sigma_\alpha w' \not\leqslant w'$ alors $\sigma_\alpha w' > w'$ et donc $\sigma_\alpha w'$ n'est pas dans le support de $S_w - P$. Par la condition GKM, il résulte donc que le polynôme $(S_w - P)|_{w'}$ est divisible par le produit

$$\prod_{\substack{\alpha>0,\,\sigma_\alpha w'\not\leqslant w'\\ \sigma_\alpha w'\leqslant w_0}} \alpha \,;$$

or il y a précisément $\dim \mathbb{F}_\omega(2n+1) - \dim X_{w'} = n(n+1) - \ell(w')$ racines dans ce produit et $(S_w - P)|_{w'}$ est un polynôme de degré $n(n+1) - \ell(w) < n(n+1) - \ell(w')$, contradiction. ∎

Remarque 5.3.8. Notons que les racines α qui apparaissent dans la formule (5.13) sont exactement celle qui marquent les arrêtes du graphe GKM de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ qui relient w à des sommets situés en dehors de $W(\mathrm{Sp}_{2n+1})_{\leqslant w}$. Pour toute classe $P \in H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$ qui a son support dans $W(\mathrm{Sp}_{2n+1})_{\leqslant w}$, par le théorème GKM le polynôme $P|_w$ est divisible par le produit de (5.13). La même remarque est vraie pour $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$.

Exemple 5.3.9. Les quatre classes de Schubert équivariantes de $\mathbb{F}_\omega(3)$ sont les suivantes :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & 1 & \\ 1 \arrow[ur, "\varepsilon_0+\varepsilon_1"] & & 1 \arrow[ul, "2\varepsilon_1"'] \\ & 1 \arrow[ul, "2\varepsilon_1"] \arrow[ur, "\varepsilon_0-\varepsilon_1"'] & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & 0 & \\ 0 \arrow[ur, "\varepsilon_0+\varepsilon_1"] & & 2\varepsilon_1 \arrow[ul, "2\varepsilon_1"'] \\ & 2\varepsilon_1 \arrow[ul, "2\varepsilon_1"] \arrow[ur, "\varepsilon_0-\varepsilon_1"'] & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & 0 & \\ \varepsilon_0+\varepsilon_1 \arrow[ur, "\varepsilon_0+\varepsilon_1"] & & 0 \arrow[ul, "2\varepsilon_1"'] \\ & \varepsilon_0-\varepsilon_1 \arrow[ul, "2\varepsilon_1"] \arrow[ur, "\varepsilon_0-\varepsilon_1"'] & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & 0 & \\ 0 \arrow[ur, "\varepsilon_0+\varepsilon_1"] & & 0 \arrow[ul, "2\varepsilon_1"'] \\ & 2\varepsilon_1(\varepsilon_0-\varepsilon_1) \arrow[ul, "2\varepsilon_1"] \arrow[ur, "\varepsilon_0-\varepsilon_1"'] & \end{tikzcd}$$

$$S_{\bar{1}0} \qquad\qquad S_{10} \qquad\qquad S_{0\bar{1}} \qquad\qquad S_{01}$$

Comme annoncé, on a le résultat suivant :

Proposition 5.3.10. *Les classes de Schubert équivariantes $\{S_w\}_{w\in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})}$ forment une base du S-module $H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$.*

Preuve. Montrons d'abord que les classes S_w engendrent $H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$. Soit P un élément de $H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$; pour montrer que P est une combinaison S-linéaire des S_w on procède par récurrence sur la longueur maximale d'un élément du support de P. Si cette longueur est 0 alors P est supporté en $1 \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ et par la remarque 5.3.8 ci-dessus, P est un multiple de la classe de Schubert S_1. Soit maintenant P arbitraire et soient $w_1, \ldots, w_r$ les éléments de longueur maximum dans le support de P ; soit ℓ cette longueur. Pour chaque $0 \leqslant i \leqslant r$ si α est une racine positive telle que $\sigma_\alpha w_i \not\leqslant w_i$ alors $\sigma_\alpha w_i > w_i$ donc $\sigma_\alpha w_i$ est de longueur au moins $\ell + 1$ et donc $\sigma_\alpha w_i$ n'est pas dans le support de P. Par la condition GKM il s'ensuit que le polynôme $P|_{w_i}$ est divisible par

$$\prod_{\substack{\alpha>0,\, \sigma_\alpha w_i \not\leqslant w_i \\ \sigma_\alpha w_i \leqslant w_0}} \alpha = S_{w_i}|_{w_i} \ ;$$

soit $q_i \in S$ tel que $P|_{w_i} = q_i \cdot S_{w_i}|_{w_i}$. Alors

$$(P - \sum_{1\leqslant i\leqslant r} q_i S_{w_i})|_{w_j} = 0, \qquad \text{pour tout } 1 \leqslant j \leqslant r$$

autrement dit la longueur maximale dans le support de $P - \sum_{1\leqslant i\leqslant r} q_i S_{w_i}$ est au plus $\ell - 1$; alors par l'hypothèse de récurrence $P - \sum_{1\leqslant i\leqslant r} q_i S_{w_i}$ est combinaison linéaire des S_w, donc P aussi.

Montrons maintenant que les S_w sont indépendantes sur S. Soit par l'absurde

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant r} q_i S_{w_i} = 0$$

une relation non triviale, où l'on suppose $w_1, \ldots, w_r$ distincts. Soit w maximal parmi les $w_1, \ldots, w_r$; alors pour $w_i \neq w$ on a $S_{w_i}|_w = 0$ donc

$$(\sum_{1 \leqslant i \leqslant r} q_i S_{w_i})|_w = q_w S_w|_w = 0$$

d'où $q_w = 0$, contradiction. ■

Si l'on adapte la preuve précédente à $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$ on obtient :

Proposition 5.3.11. *Les classes de Schubert équivariantes $\{\tilde{S}_w\}_{w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+2})}$ forment une base du S-module $H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+2))$.*

Par analogie avec le cas non équivariant, on appelle alors *calcul de Schubert équivariant* sur la variété de drapeaux symplectiques impaire $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ le problème de déterminer les constantes de structure $c_{uv}^w \in S$ qui sont définies par

$$\forall u, v, w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1}) \ : \qquad S_u \cdot S_v = \sum_{w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})} c_{uv}^w S_w \ ;$$

de même pour $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$ et les constantes $\tilde{c}_{vu}^w \in S$ définies de manière analogue.

Une propriété simple qui relie pour $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ les classes S_w et $\tilde{S}_w$ est la suivante :

Proposition 5.3.12. *Si $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ alors $\tilde{S}_w|_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)} = S_w \cdot e_T(\mathbb{F}_\omega(2n+1), \mathbb{F}_\omega(2n+2))$.*

PREUVE. Ceci découle de la fonctorialité du morphisme de Gysin équivariant : soit $i : X_w \hookrightarrow \mathbb{F}_\omega(2n+1)$ respectivement $j : \mathbb{F}_\omega(2n+1) \hookrightarrow \mathbb{F}_\omega(2n+2)$ les inclusions ; notons pour simplifier i_* et j_* les morphismes de Gysin équivariants qui leur correspondent. Alors $S_w = i_* 1$ et $\tilde{S}_w = (j \circ i)_* 1 = j_* i_* 1$, on a donc

$$\tilde{S}_w|_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)} = j^* j_* i_* 1 = j^* j_*(S_w) = S_w e_T(\mathbb{F}_\omega(2n+1), \mathbb{F}_\omega(2n+2))$$

puisque $j^* j_*$ est la multiplication par la classe d'Euler équivariante de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ dans $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$. ■

La formule précédente devient explicite une fois que l'on a calculé la classe d'Euler équivariante $e_T(\mathbb{F}_\omega(2n+1), \mathbb{F}_\omega(2n+2))$:

Proposition 5.3.13. *La classe d'Euler équivariante de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ dans $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$ est donnée par*

$$e_T(\mathbb{F}_\omega(2n+1), \mathbb{F}_\omega(2n+2))|_w = \prod_{i=0}^{n} (\varepsilon_0 + w(\varepsilon_i)), \qquad \textit{pour tout } w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1}).$$

PREUVE. Puisque $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ est lisse, pour tout T-point fixe $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ la restriction $e_T(\mathbb{F}_\omega(2n+1), \mathbb{F}_\omega(2n+2))|_w$ est le produit des T-poids de l'espace normal de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ dans $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$ au point w. Ces poids sont les racines α telles que $\sigma_\alpha w \nleqslant w_0$, où w_0 est l'élément maximal de $W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$; on a énuméré ces racines dans la preuve de la proposition 5.2.4, ce sont

$2\varepsilon_0$,
$\varepsilon_0 - \varepsilon_i$ si w contient $\bar{\imath}$,

$\varepsilon_0 + \varepsilon_i$ si w contient i,
c'est-à-dire se sont les $\varepsilon_0 + \varepsilon_{w(i)} = \varepsilon_0 + w(\varepsilon_i)$, pour $0 \leqslant i \leqslant n$. ■

Remarque 5.3.14. On a $e_T(\mathbb{F}_\omega(2n+1), \mathbb{F}_\omega(2n+2)) = [\mathbb{F}_\omega(2n+1)]_T|_{\mathbb{F}_\omega(2n+2)} = S_{w_0}|_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)}$; on a donc

$$S_{w_0}|_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)} = \prod_{i=0}^{n} (\varepsilon_0 + w(\varepsilon_i)), \qquad w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1}).$$

L'égalité est vraie aussi pour $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+2})$ puisque pour un tel w il existe i, $0 \leqslant i \leqslant n$, tel que $w(\varepsilon_i) = \varepsilon_{\bar{0}} = -\varepsilon_0$. Par ailleurs, on aurait pu vérifier directement que la classe $P \in H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$ définie par $P|_w = \prod_{i=0}^n (\varepsilon_0 + w(\varepsilon_i))$ vérifie les mêmes trois conditions de la proposition 5.3.7 que S_{w_0}.

Remarque 5.3.15. Ayant explicité la classe d'Euler équivariante $e_T(\mathbb{F}_\omega(2n+1), \mathbb{F}_\omega(2n+2))$ on peut préciser la formule (5.13) de la proposition 5.3.7 par

$$S_w|_w = \frac{\displaystyle\prod_{\alpha>0,\, w^{-1}(\alpha)>0} (-\alpha)}{\displaystyle\prod_{i=0}^{n} (\varepsilon_0 + w(\varepsilon_i))}. \tag{5.14}$$

5.3.2 Opérateurs de différences divisées

Le groupe de Weyl $W(\mathrm{Sp}_{2n})$ agit sur $W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ et sur l'anneau de polynômes $S = \mathbb{C}[\mathfrak{t}]$; en s'inspirant de la démarche de Knutson et Tao dans [KT03] on va utiliser ces actions et le théorème GKM pour définir des opérateurs de différences divisées

$$\partial_w : H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1)) \longrightarrow H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$$

associés aux éléments w de $W(\mathrm{Sp}_{2n})$. En identifiant l'anneau $\bigoplus_{w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})} S$ à l'anneau $\mathrm{F}(W(\mathrm{Sp}_{2n+1}); S)$ des fonctions définies sur $W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ à valeurs dans S, on définit une action du groupe de Weyl $W(\mathrm{Sp}_{2n})$ sur le premier :

$$\forall w \in W(\mathrm{Sp}_{2n}),\ \forall P = (P_{w'})_{w' \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})} : \qquad (wP)_{w'} = w(P_{w^{-1}w'}). \tag{5.15}$$

Comme jusqu'ici, on identifie l'anneau de cohomologie équivariante $H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$ à son image dans $\bigoplus_{w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})} S$, décrite par le théorème GKM ; en conséquence, nous allons écrire, lorsque ceci est possible, P_w au lieu de $P|_w$ pour une classe $P \in H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$.

Lemme 5.3.16. *$H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$ est stable sous l'action de $W(\mathrm{Sp}_{2n})$ dans $\bigoplus_{w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})} S$.*

Preuve. Soit $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n})$ et $P \in H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$; pour α une racine et $w' \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$, on a

$$(wP)_{\sigma_\alpha w'} - (wP)_{w'} = w(P_{w^{-1}\sigma_\alpha w'}) - w(P_{w^{-1}w'}) = w(P_{\sigma_{w^{-1}(\alpha)} w^{-1}w'} - P_{w^{-1}w'}).$$

Or par la condition GKM, $P_{\sigma_{w^{-1}(\alpha)} w^{-1}w'} - P_{w^{-1}w'}$ est divisible par $w^{-1}(\alpha)$ donc $(wP)_{\sigma_\alpha w'} - (wP)_{w'}$ est divisible par α. ■

La formule (5.15) définit donc une action de $W(\mathrm{Sp}_{2n})$ dans $H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$.

Définition 5.3.17. Soit α une racine simple de Sp_{2n} ; pour $P \in H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$ on pose

$$\partial_\alpha P = \frac{1}{\alpha}(P - \sigma_\alpha(P)). \tag{5.16}$$

Explicitement, ceci veut dire que

$$(\partial_\alpha P)_w = \frac{P_w - \sigma_\alpha(P_{\sigma_\alpha w})}{\alpha}.$$

Notons que a priori $\partial_\alpha P$ n'est pas dans $\mathrm{F}(W(\mathrm{Sp}_{2n+1}); S)$ mais dans $\mathrm{F}(W(\mathrm{Sp}_{2n+1}); Q)$ où Q est le corps de fractions de S. On a cependant

$$(\partial_\alpha P)_w = \frac{1}{\alpha}(P_w - \sigma_\alpha(P_{\sigma_\alpha w})) = \frac{1}{\alpha}(P_w - P_{\sigma_\alpha w}) + \frac{1}{\alpha}(P_{\sigma_\alpha w} - \sigma_\alpha(P_{\sigma_\alpha w}))$$

qui est dans S puisque les deux parenthèses sont divisibles par α.

Lemme 5.3.18. *Pour tout $P \in H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$, on a $\partial_\alpha P \in H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$.*

PREUVE. Il s'agit de montrer que pour toute racine α' et tout $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$, le polynôme $(\partial_\alpha P)_w - (\partial_\alpha P)_{\sigma_{\alpha'} w}$ est divisible par α'. Nous considérons deux cas selon que les racines α et α' coïncident ou non.

Si $\alpha = \alpha'$ alors

$$\begin{aligned}(\partial_\alpha P)_w - (\partial_\alpha P)_{\sigma_\alpha w} &= \frac{1}{\alpha}[P_w - \sigma_\alpha(P_{\sigma_\alpha w})] - \frac{1}{\alpha}[P_{\sigma_\alpha w} - \sigma_\alpha(P_w)] \\ &= \frac{1}{\alpha}(P_w - P_{\sigma_\alpha w}) - \frac{1}{\alpha}\sigma_\alpha(P_w - P_{\sigma_\alpha w}) \\ &= \frac{1}{\alpha}(P_w - P_{\sigma_\alpha w}) - \sigma_\alpha\big(\frac{1}{\alpha}(P_w - P_{\sigma_\alpha w})\big)\end{aligned}$$

qui est divisible par α puisque c'est un polynôme de la forme $Q - \sigma_\alpha(Q)$.

Si $\alpha \neq \alpha'$ alors α et α' sont premiers entre eux ; on a

$$(\partial_\alpha P)_w - (\partial_\alpha P)_{\sigma_{\alpha'} w} = \frac{1}{\alpha}[P_w - \sigma_\alpha(P_{\sigma_\alpha w}) - P_{\sigma_{\alpha'} w} + \sigma_\alpha(P_{\sigma_\alpha \sigma_{\alpha'} w})].$$

Le polynôme $P_w - P_{\sigma_{\alpha'} w}$ est divisible par α' par la condition GKM ; le polynôme $P_{\sigma_\alpha w} - P_{\sigma_\alpha \sigma_{\alpha'} w} = P_{\sigma_\alpha w} - P_{\sigma_{\alpha(\alpha')} w}$ est divisible par $\sigma_\alpha(\alpha')$ donc $\sigma_\alpha(P_{\sigma_\alpha w}) - \sigma_\alpha(P_{\sigma_\alpha \sigma_{\alpha'} w})$ est divisible par α'. ■

Donc les ∂_α sont bien des opérateurs sur l'anneau $H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$.

Remarque 5.3.19. L'anneau S vu comme sous-anneau de $H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$ via l'inclusion diagonale

$$P \mapsto (P_w)_{w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})}, \qquad P_w = P \text{ pour tout } w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$$

est stable pour les opérateurs ∂_α, et la restriction de ∂_α à S est l'opérateur BGG usuel, introduit par I.N. Bernstein, I.M. Gelfand et S.I. Gelfand dans [BGG73, 3.2] (qui est défini par la même formule (5.16)).

Remarque 5.3.20. La même définition et les mêmes arguments que ci-dessus permettent de définir des opérateurs

$$\partial_\alpha : H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+2)) \to H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+2))$$

cette fois pour α racine simple de Sp_{2n+2}, qui relèvent, lorsque α est racine de Sp_{2n}, les ∂_α définis sur $H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$. De plus, si l'on identifie $H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+2))$ à $S \otimes_{S^{W(\mathrm{Sp}_{2n+2})}} S$ comme expliqué au n° 5.2.1 alors les opérateurs ∂_α sur $H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+2))$ se relèvent en des opérateurs ∂_α sur $S \otimes S$ qui agissent sur la deuxième composante et proviennent des opérateurs ∂_α sur S :

$$\begin{aligned}(\partial_\alpha(P \otimes Q))_w &= \frac{(P \otimes Q)_w - \sigma_\alpha((P \otimes Q)_{\sigma_\alpha w})}{\alpha} \\ &= \frac{w(P)Q - \sigma_\alpha(\sigma_\alpha w(P)Q)}{\alpha} = \frac{w(P)Q - w(P)\sigma_\alpha Q}{\alpha} = w(P)\frac{Q - \sigma_\alpha Q}{\alpha} \\ &= (P \otimes \partial_\alpha Q)_w\end{aligned}$$

Les opérateurs ∂_α agissent de manière agréable dans la base des classes de Schubert équivariantes $\{S_w\}_{w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})}$:

Proposition 5.3.21. *Soit α une racine simple de Sp_{2n} ; pour tout $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ on a*

$$\partial_\alpha S_w = \begin{cases} -S_{\sigma_\alpha w} & \text{si } \sigma_\alpha w > w \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5.17}$$

Preuve. Il est clair que $\partial_\alpha S_w$ est un élément homogène de $H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$ de degré $\deg S_w - 1$. Supposons que $\sigma_\alpha w < w$. D'après l'argument de la preuve de la proposition 5.3.10, pour que $\partial_\alpha S_w$ soit non nulle il faudrait que son support contienne au moins un élément w' de longueur $\ell(w') \geqslant \ell(w) + 1$. Or pour un tel élément on a $w' \nleqslant w$ donc $w' \nleqslant \sigma_\alpha w$ et donc

$$(\partial_\alpha S_w)|_{w'} = \frac{S_w|_{w'} - \sigma_\alpha(S_w|_{\sigma_\alpha w'})}{\alpha} = 0;$$

il résulte que $\partial_\alpha S_w = 0$.

Supposons maintenant que $\sigma_\alpha w > w$; nous vérifions que $\partial_\alpha S_w$ satisfait les mêmes conditions de la proposition 5.3.7 que $-S_{\sigma_\alpha w}$. La condition sur le degré est satisfaite, vérifions que $\partial_\alpha S_w$ a son support dans $W(\mathrm{Sp}_{2n+1})_{\leqslant \sigma_\alpha w}$. Nous utilisons la propriété suivante qui est valable dans tout groupe de Weyl (cf. [BGG73, 2.5] ou [Bou68]) : soit β une racine simple, alors

$$w' < w \Longrightarrow \sigma_\beta w \leqslant w' \text{ ou } \sigma_\beta w \leqslant \sigma_\beta w'. \tag{5.18}$$

Soit $w' \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ tel que $w' \nleqslant \sigma_\alpha w$; alors $w' \nleqslant w$ et aussi $\sigma_\alpha w' \nleqslant w$, sinon par (5.18) on devrait avoir $w' \leqslant w$ ou $w' \leqslant \sigma_\alpha w$. Il résulte $(\partial_\alpha S_w)|_{w'} = 0$.

Enfin, on a

$$(\partial_\alpha S_w)|_{\sigma_\alpha w} = \frac{S_w|_{\sigma_\alpha w} - \sigma_\alpha(S_w|_w)}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha}\sigma_\alpha(S_w|_w) = -\frac{1}{\alpha}\frac{\sigma_\alpha\Big(\prod_{\beta \in \Delta_+ \cap w\Delta_+}(-\beta)\Big)}{\sigma_\alpha\Big(\prod_{i=0}^{n}(\varepsilon_0 + w(\varepsilon_i))\Big)}.$$

Comme α est simple, on a $\sigma_\alpha\Delta_+ = \{-\alpha\} \cup \Delta_+ \setminus \{\alpha\}$ et comme $\sigma_\alpha w > w$, on a $\alpha \in w\Delta_+$ donc

$$-\frac{1}{\alpha}\sigma_\alpha\Big(\prod_{\beta\in\Delta_+\cap w\Delta_+}(-\beta)\Big) = -\frac{1}{\alpha}\prod_{\beta\in\Delta_+\cap w\Delta_+}(-\sigma_\alpha(\beta)) = -\frac{1}{\alpha}\prod_{\beta\in\sigma_\alpha\Delta_+\cap\sigma_\alpha w\Delta_+}(-\beta)$$
$$= -\prod_{\beta\in\Delta_+\cap\sigma_\alpha w\Delta_+}(-\beta).$$

Par ailleurs, comme α est une racine de Sp_{2n}, on a $\sigma_\alpha(\varepsilon_0) = \varepsilon_0$ donc

$$\sigma_\alpha\Big(\prod_{i=0}^{n}(\varepsilon_0 + w(\varepsilon_i))\Big) = \prod_{i=0}^{n}(\varepsilon_0 + \sigma_\alpha w(\varepsilon_i)).$$

et vu la formule (5.13) ceci achève la preuve. ■

L'affirmation analogue pour les classes $\tilde{S}_w$ est vraie, avec (presque) la même démonstration :

Proposition 5.3.22. *Soit α une racine simple de Sp_{2n+2}. Pour tout $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+2})$ on a*

$$\partial_\alpha \tilde{S}_w = \begin{cases} -\tilde{S}_{\sigma_\alpha w} & si\ \sigma_\alpha w > w \\ 0 & sinon. \end{cases} \tag{5.19}$$

La proposition suivante explicite comment agit sur la base des classes de Schubert équivariantes une composition d'opérateurs ∂_α :

Proposition 5.3.23. *Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ des racines simples de Sp_{2n}. Pour tout $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ on a*

$$\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\dots\partial_{\alpha_\ell} S_w = \begin{cases} (-1)^\ell S_{\sigma_{\alpha_1}\dots\sigma_{\alpha_\ell} w} & si\ \ell(\sigma_{\alpha_1}\dots\sigma_{\alpha_\ell} w) = \ell(w) + \ell \\ 0 & sinon. \end{cases} \tag{5.20}$$

PREUVE. Si $\ell(\sigma_{\alpha_1}\dots\sigma_{\alpha_\ell} w) = \ell(w) + \ell$ alors on a une chaîne d'éléments de $W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ où chaque terme précède le suivant pour l'ordre de Bruhat

$$w \longrightarrow \sigma_{\alpha_\ell} w \longrightarrow \sigma_{\alpha_{\ell-1}}\dots\sigma_{\alpha_\ell} w \longrightarrow \dots \longrightarrow \sigma_{\alpha_1}\dots\sigma_{\alpha_\ell} w$$

et alors l'affirmation de l'énoncé découle par récurrence de la proposition 5.3.21.

Si $\ell(\sigma_{\alpha_1}\dots\sigma_{\alpha_\ell} w) \neq \ell(w) + \ell$ alors il existe i, $1 \leqslant i \leqslant \ell$ tel que

$$w \longrightarrow \sigma_{\alpha_\ell} w \longrightarrow \dots \longrightarrow \sigma_{\alpha_{i+1}}\dots\sigma_{\alpha_\ell} w \not\longrightarrow \sigma_{\alpha_i}\sigma_{\alpha_{i+1}}\dots\sigma_{\alpha_\ell} w$$

(on pose par convention $\sigma_{\alpha_{\ell+1}} = 1$) ; soit i maximal avec cette propriété. Alors par la première partie de la preuve et par la proposition 5.3.21 on a

$$\partial_{\alpha_i}\partial_{\alpha_{i+1}}\dots\partial_{\alpha_\ell} S_w = \partial_{\alpha_i}(\pm S_{\sigma_{\alpha_{i+1}}\dots\sigma_{\alpha_\ell} w}) = 0. \quad ■$$

Corollaire 5.3.24. *Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ des racines simples de Sp_{2n}. L'opérateur $\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\dots\partial_{\alpha_\ell}$ ne dépend que du produit $\sigma_{\alpha_1}\dots\sigma_{\alpha_\ell}$; si $\sigma_{\alpha_1}\dots\sigma_{\alpha_\ell}$ n'est pas une décomposition réduite, c'est-à-dire si $\ell(\sigma_{\alpha_1}\dots\sigma_{\alpha_\ell}) \neq \ell$, alors $\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\dots\partial_{\alpha_\ell} = 0$.*

On peut donc introduire la notation suivante :

Notation 5.3.25. Soit $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n})$ et soit $w = \sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_\ell}$ une décomposition réduite de w, on note $\partial_w = \partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_\ell}$.

Avec cette notation la proposition 5.3.23 s'écrit :

Proposition 5.3.26. *Soit $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n})$ et $w' \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$, alors*

$$\partial_w S_{w'} = \begin{cases} (-1)^{\ell(w)} S_{ww'} & \textit{si } \ell(ww') = \ell(w) + \ell(w') \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases} \tag{5.21}$$

On a bien entendu les résultats analogues de la proposition 5.3.23 et du corollaire 5.3.24 pour les opérateurs ∂_α sur $H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+2))$. De plus, l'analogue du corollaire 5.3.24 est vrai aussi pour les opérateurs ∂_α sur $S \otimes S$; on déduit ceci des résultats correspondants de [BGG73] concernant les opérateurs ∂_α sur S.

On peut donc utiliser les opérateurs ∂_α pour définir les classes de Schubert équivariantes $\{\tilde{S}_w\}_{w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+2})}$ à partir de la classe du point $\tilde{S}_1$. Dans le cas de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ les opérateurs ∂_α sont définis seulement pour $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n})$ donc les opérateurs ∂_α permettent dans ce cas de passer d'une classe S_w à une autre $S_{w''}$ avec w et w'' dans la même $W(\mathrm{Sp}_{2n})$-orbite ; pour obtenir donc toutes les classes de Schubert équivariantes $\{S_w\}_{w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})}$ en utilisant la proposition 5.3.23, il ne suffit pas de connaître la classe du point S_1 mais aussi toutes les classes associées aux éléments minimaux de chaque $W(\mathrm{Sp}_{2n})$-orbite de $W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$.

5.3.3 Variétés de Schubert minimales

Dans cette section nous étudions les variétés de Schubert associées aux éléments minimaux de chaque orbite de $W(\mathrm{Sp}_{2n})$ dans $W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$. Par la proposition 5.2.5 l'élément minimal de la classe $W(\mathrm{Sp}_{2n})\sigma_{\varepsilon_0-\varepsilon_1} \dots \sigma_{\varepsilon_{i-1}-\varepsilon_i}$ est $\sigma_{\varepsilon_0-\varepsilon_1} \dots \sigma_{\varepsilon_{i-1}-\varepsilon_i}$; c'est un élément de longueur i, notons-le w_i. La variété de Schubert X_{w_i} est la plus petite (au sens de l'inclusion) variété de Schubert contenue dans l'adhérence $\overline{\mathcal{O}_{i+1}}$ de la Sp_{2n+1}-orbite $\mathcal{O}_{i+1}$ et qui n'est pas incluse dans $\overline{\mathcal{O}_i}$ (cf. la remarque 5.2.6).

En notation en ligne w_i s'écrit $w_i = 12 \dots i0i{+}1 \dots n$; la variété de Schubert X_{w_i} est donc la variété de Schubert définie par la matrice de taille $(n+1) \times (2n+1)$

$$\begin{pmatrix}
* & * & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
* & * & * & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & \ddots & \ddots & & & \\
* & \cdots & \cdots & * & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\
* & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
* & \cdots & \cdots & \cdots & * & 0 & \cdots & \cdots \\
 & & & & & \ddots & \ddots &
\end{pmatrix}.$$

Notons $E_\bullet = (E_1 \subset \dots \subset E_{2n+1})$ le drapeau de référence dont une base adaptée est $\{e_0, e_1, \dots, e_{2n}\}$ c'est-à-dire $E_i = \langle e_0, \dots, e_{i-1} \rangle$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant 2n+1$. Alors par la proposition 3.2.14, on a :

Proposition 5.3.27. *La variété de Schubert X_{w_i} est l'ensemble des drapeaux $V_\bullet = (V_1 \subset \dots \subset V_{n+1})$ qui vérifient les conditions*

$$V_1 \subset E_2,\ V_2 \subset E_3, \dots, V_i \subset E_{i+1}, \tag{5.22}$$

$$V_{i+1} = E_{i+1}, \dots, V_{n+1} = E_{n+1}. \tag{5.23}$$

En particulier, la variété de Schubert $X_{w_{i-1}} \subset X_{w_i}$ coïncide avec la sous-variété de X_{w_i} définie par la condition $V_i = E_i$. Remarquons aussi que, puisque le sous-espace E_{i+1} est isotrope, X_{w_i} est isomorphe à une variété de Schubert de la variété de drapeaux de type A, $\mathbb{F}(E_{i+1})$, à savoir à la sous-variété des drapeaux de $\mathbb{F}(E_{i+1})$ qui vérifient la condition (5.22) ci-dessus.

Les conditions (5.22) impliquent que X_{w_i} est isomorphe à une tour de fibrations en $\mathbb{P}^1$, plus précisément l'application $\pi_i : X_{w_i} \to X_{w_{i-1}}$

$$\pi_i : (V_1 \subset \cdots \subset V_i \subset E_{i+1} \subset \cdots \subset E_{n+1}) \mapsto (V_1 \subset \cdots \subset V_{i-1} \subset E_i \subset E_{i+1} \subset \cdots \subset E_{n+1})$$

est une fibration B-équivariante[8] de fibre $\mathbb{P}^1$; elle identifie X_{w_i} au projectivisé $\mathbb{P}(E_{i+1}/T_{i-1})$ du fibré quotient E_{i+1}/T_{i-1} – où par abus de notation on désigne par E_{i+1} le fibré trivial de fibre E_{i+1} sur X_{w_i} et par T_{i-1} la restriction à X_{w_i} du fibré tautologique de rang $i-1$ de la variété de drapeaux $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$. En particulier, X_{w_i} est lisse et son groupe de Picard est $\mathbb{Z}^i$.

En fait, les diviseurs B-stables de X_{w_i} sont les suivants : les préimages par π_i des diviseurs B-stables de $X_{w_{i-1}}$ et la section $X_{w_{i-1}}$, c'est-à-dire par récurrence, les diviseurs

$$X_{w_{i-1}},\ \pi_i^{-1}X_{w_{i-2}},\ \pi_i^{-1}\pi_{i-1}^{-1}X_{w_{i-3}}, \ldots,\ \pi_i^{-1}\pi_{i-1}^{-1}\ldots\pi_2^{-1}X_1.$$

Autrement dit les diviseurs B-stables de X_{w_i} sont définis en choisissant dans l'une des fibres $\{V_j \mid V_{j-1} \subset V_j \subset E_{j+1}\}$, $j \leqslant i$ de la tour

$$X_{w_i} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{w_j} \longrightarrow X_{w_{j-1}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{w_1}$$

le point privilégié E_j. Les diviseurs de Schubert de X_{w_i} sont donc les sous-variétés $D_1, \ldots, D_i$ définies par $D_j = \{V_j = E_j\}$; en particulier $D_i = X_{w_{i-1}}$.

L'ensemble $W(\mathrm{Sp}_{2n+1})_{\leqslant w_i}$ des T-points fixes de X_{w_i} est déterminé comme suit : par les conditions (5.22), pour $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ le T-point fixe $E_\bullet^w = w(E_\bullet)$ – qui est le drapeau dont une base adaptée est $\{e_{w(0)}, \ldots, e_{w(n)}\}$ – est dans X_{w_i} si et seulement si

$$\begin{aligned}
&0 \leqslant w(0) \leqslant 1,\ 0 \leqslant w(1) \leqslant 2, \ldots,\ 0 \leqslant w(i-1) \leqslant i\\
&0 \leqslant w(i) \leqslant i\\
&w(i+1) = i+1, \ldots,\ w(n) = n.
\end{aligned}$$

On remarque en particulier que pour chaque j, une fois choisis $w(0), \ldots, w(j-1)$, pour $w(j)$ il reste deux choix possibles car $w(j) \in \{0, \ldots, j+1\} \setminus \{w(0), \ldots, w(j-1)\}$; il résulte que $W(\mathrm{Sp}_{2n+1})_{\leqslant w_i}$ a 2^i éléments.[9]

Par ailleurs, pour chaque sous-ensemble $J \subset \{1, \ldots, i\}$, l'ensemble

$$X_J = \bigcap_{j \in J} D_j = \{V_\bullet \mid V_j = E_j \text{ pour tout } j \in J\} \tag{5.24}$$

est un fermé B-stable non vide de X_{w_i}. Il s'ensuit que les sous-variétés de Schubert de X_{w_i} sont précisément les X_J, $J \subset \{1, \ldots, i\}$.

[8] B est le sous-groupe de Borel de Sp_{2n+1} qui préserve le drapeau $E_\bullet$.

[9] $|W(\mathrm{Sp}_{2n+1})_{\leqslant w_i}|$ est la caractéristique d'Euler de X_{w_i} donc l'égalité $|W(\mathrm{Sp}_{2n+1})_{\leqslant w_i}| = 2^i$ résulte aussi du fait que X_{w_i} est une tour de i fibrations en $\mathbb{P}^1$.

Au voisinage du T-point fixe $E_\bullet$ les drapeaux de X_{w_i} ont une base adaptée $\{v_1, \dots, v_n\}$ de la forme

$$\begin{aligned} &v_0 = e_0 + x_1 e_1 \\ &v_1 = e_1 + x_2 e_2 \\ &\dots \\ &v_{i-1} = e_{i-1} + x_i e_i \\ &v_i = e_i, \dots, v_n = e_n \end{aligned}$$

donc $(x_1, \dots, x_i)$ sont des coordonnées locales qui identifient ce voisinage à $\mathbb{C}^i$. Localement en $E_\bullet$ le diviseur $D_j = \{V_j = E_j\}$ est donc donné par l'équation

$$x_j = 0$$

c'est-à-dire que $D_1, \dots, D_i$ s'identifient aux hyperplans de coordonnées et donc l'intersection

$$D_1 \cap \dots \cap D_i = \{E_\bullet\}$$

est transverse.

Il résulte que X_{w_i} vérifie toutes les hypothèses de la définition d'une variété magnifique, à l'exception de celle qui exige que B soit un groupe réductif.

Notons que X_J est de dimension $|J|$ donc les nombres de Betti de X_{w_i} sont

$$B_{2k} = \binom{i}{k}.$$

On peut voir ceci sous un angle différent qui s'avère très utile. Rappelons d'abord la propriété suivante dite *propriété du sous-mot*, qui caractérise l'ordre de Bruhat dans un groupe de Weyl W (cf. [BGG73, 2.8] ou [Bou68]) :

Lemme 5.3.28. *Soit u et w des éléments du groupe de Weyl W et soit $w = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_\ell$ une décomposition réduite de w. Alors $u \leqslant w$ si et seulement si ou bien $u = 1$, ou bien il existe $1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant \ell$ tels que $u = \sigma_{i_1}\sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_k}$ est une décomposition réduite de u.*

Notons pour alléger l'écriture dans la suite $\sigma_j = \sigma_{\varepsilon_{j-1}-\varepsilon_j}$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Alors $w_i = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_i$ et donc par la propriété du sous-mot, tout élément $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ tel que $w \leqslant w_i$ est de la forme $w = \sigma_{j_1}\sigma_{j_2} \dots \sigma_{j_k}$ avec $1 \leqslant j_1 < \dots < j_k \leqslant i$.

Comme les réflections $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i$ sont distinctes, ceci fournit une bijection entre les sous-ensembles $J \subset \{1, \dots, i\}$ et l'intervalle $W(\mathrm{Sp}_{2n+1})_{\leqslant w_i}$.

Notation 5.3.29. Nous notons σ_J l'élément $w = \sigma_{j_1}\sigma_{j_2} \dots \sigma_{j_k}$ qui correspond à l'ensemble $J = \{j_1, \dots, j_k\}$ (où la notation est telle que $j_1 < \dots < j_k$).

Les sous-variétés de Schubert de X_{w_i} sont donc les X_{σ_J}, pour $J \subset \{1, \dots, i\}$. Relions ceci à la bijection introduite auparavant. Un point fixe w appartient au diviseur de Schubert $D_j = \{V_j = E_j\}$ si et seulement si la permutation w préserve le sous-ensemble $\{0, 1, \dots, j-1\} \subset \{0, \dots, n\}$ donc

$$D_j = X_{\sigma_{\{1,\dots,i\}\setminus\{j\}}}. \tag{5.25}$$

Alors pour tout sous-ensemble $J \subset \{1, \ldots, i\}$, la variété de Schubert X_J introduite dans la formule (5.24) est donnée par

$$X_J = \bigcap_{j \in J} D_j = X_{\sigma_{\{1,\ldots,i\} \setminus J}}. \tag{5.26}$$

Le graphe GKM de X_{w_i} coïncide avec le graphe de Bruhat de X_{w_i}, c'est-à-dire que si deux points fixes w et w' de X_{w_i} sont reliés dans le graphe GKM alors leurs longueurs diffèrent d'une unité. En effet, on peut être plus précis : les i voisins d'un élément de longueur k, $w = \sigma_{j_1}\sigma_{j_2}\ldots\sigma_{j_k} = \sigma_J$ dans le graphe GKM de X_{w_i} sont les k éléments de longueur $k-1$

$$\sigma_{J \setminus \{j\}}, \qquad j \in J$$

et les $i-k$ éléments de longueur $k+1$

$$\sigma_{J \cup \{a\}}, \qquad a \in \{1, \ldots, i\} \setminus J.$$

On en déduit :

Proposition 5.3.30. *Les T-poids de l'espace tangent $T_{\sigma_J} X_{w_i}$ de X_{w_i} au point fixe $\sigma_J = \sigma_{j_1}\sigma_{j_2}\ldots\sigma_{j_k}$ sont*

$$-\sigma_{j_1}\sigma_{j_2}\ldots\sigma_{j_b}(\alpha_a), \qquad 1 \leqslant a \leqslant i,\ j_b \leqslant a < j_{b+1}$$

où l'on pose par convention $j_0 = 0$, $j_{k+1} = i+1$ et $\sigma_0 = 1$.

PREUVE. Si $a = j_b$ alors $\sigma_J = \sigma_\alpha \sigma_{J \setminus \{j_b\}}$ où $\sigma_\alpha = \sigma_{j_1}\ldots\sigma_{j_{b-1}}\sigma_{j_b}\sigma_{j_{b-1}}\ldots\sigma_{j_1}$ est la réflexion associée à la racine $\alpha = \sigma_{j_1}\ldots\sigma_{j_{b-1}}(\alpha_{j_b}) = -\sigma_{j_1}\ldots\sigma_{j_{b-1}}\sigma_{j_b}(\alpha_{j_b})$; ces racines sont les T-poids de l'espace tangent $T_{\sigma_J} X_{\sigma_J}$.

Si $j_b < a < j_{b+1}$ alors $\sigma_{J \cup \{a\}} = \sigma_\alpha \sigma_J$ où $\sigma_\alpha = \sigma_{j_1}\ldots\sigma_{j_b}\sigma_a\sigma_{j_{b-1}}\ldots\sigma_{j_1}$ est la réflexion associée à la racine $\alpha = \sigma_{j_1}\ldots\sigma_{j_b}(\alpha_a)$. Comme $\sigma_{j_1}\ldots\sigma_{j_b}\sigma_a\sigma_{j_{b+1}}\ldots\sigma_{j_k} = \sigma_{J \cup \{a\}}$ est une décomposition réduite, α est une racine positive (cf. le lemme 5.3.35 ci-dessous). ∎

Corollaire 5.3.31. *La restriction de la classe équivariante $S_{w_i} \in H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$ au point fixe $w = \sigma_J = \sigma_{j_1}\sigma_{j_2}\ldots\sigma_{j_k}$ est donnée par la formule :*

$$S_{w_i}|_{\sigma_J} = \frac{\displaystyle\prod_{\alpha \in w\Delta_-} \alpha}{\displaystyle\prod_{j=0}^{n} (\varepsilon_0 + w(\varepsilon_i)) \prod_{\substack{j_b < a < j_{b+1} \\ 0 \leqslant b \leqslant i}} -\sigma_{j_1}\sigma_{j_2}\ldots\sigma_{j_b}(\alpha_a)}$$

avec les mêmes conventions que dans l'énoncé de la proposition précédente.

PREUVE. Comme X_{w_i} est lisse, on peut appliquer le lemme 5.3.2 ; la formule résulte alors de la proposition précédente et du fait que les T-poids de $T_w \mathbb{F}_\omega(2n+2)$ sont $w\Delta_-$, respectivement les T-poids de l'espace normal de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ dans $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$ en w sont $\varepsilon_0 + w(\varepsilon_i)$, $0 \leqslant i \leqslant n$. ∎

Remarque 5.3.32. Chaque $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})_{\leqslant w_i}$ a une unique décomposition réduite, à l'ordre des lettres près ; un moyen rapide de la trouver est donné par l'observation suivante :

$$w = \sigma_J \iff J = \{j \mid w(j-1) = j\}.$$

En effet, une façon de voir ceci est la suivante : on remarque que

$$w \notin D_j \iff w \text{ ne préserve pas } \{0, \ldots, j-1\} \iff w(j-1) = j,$$

et comme σ_J est l'unique point fixe de X_{w_i} qui vérifie $\sigma_J \in D_j$ pour tout $j \notin J$ et $\sigma_J \notin D_j$ pour tout $j \in J$, on obtient la caractérisation ci-dessus.

5.3.4 Une formule de Chevalley-Pieri équivariante pour $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$

Dans cette section nous déterminons une formule pour la décomposition dans la base des classes de Schubert équivariantes $\{S_w\}_{w\in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})}$ du produit d'une classe arbitraire S_w par la classe d'un diviseur de Schubert S_{div_i} ; autrement dit nous calculons les constantes de structure $c^u_{\mathrm{div}_i\, w} \in S$ de la formule

$$S_{\mathrm{div}_i} S_w = \sum_u c^u_{\mathrm{div}_i\, w} S_u. \tag{5.27}$$

Notons que par des raisons de degré, $c^u_{\mathrm{div}_i\, w}$ est un polynôme homogène de degré $\ell(u) - \ell(w) + 1$; en particulier, il est nul si $\ell(u) < \ell(w) - 1$. D'autre part le support de $S_{\mathrm{div}_i} S_w$ est inclus dans le support de S_w qui est $W(\mathrm{Sp}_{2n+1})_{\leqslant w}$. Il s'ensuit que les u pour lesquels S_u apparaît dans la décomposition (5.27) avec un coefficient non nul vérifient les conditions $u \leqslant w$ et $\ell(w) - 1 \leqslant \ell(u)$. Or $\{u \mid u \leqslant w,\ \ell(u) = \ell(w)\} = \{w\}$ et $\{u \mid u \leqslant w,\ \ell(u) = \ell(w) - 1\} = \{u \mid u \to w\}$ sont les éléments de $W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ qui précèdent w pour l'ordre de Bruhat. La formule (5.27) se réduit donc à

$$S_{\mathrm{div}_i} S_w = c^w_{\mathrm{div}_i\, w} S_w + \sum_{u\to w} c^u_{\mathrm{div}_i\, w} S_u. \tag{5.28}$$

Ici $c^w_{\mathrm{div}_i\, w}$ est un polynôme homogène linéaire et $c^w_{\mathrm{div}_i\, w}$, $u \to w$ sont des nombres rationnels.

Si dans la formule (5.28) on prend la restriction au T-point fixe w, on obtient $S_{\mathrm{div}_i}|_w S_w|_w = c^w_{\mathrm{div}_i\, w} S_w|_w$ donc

$$c^w_{\mathrm{div}_i\, w} = S_{\mathrm{div}_i}|_w. \tag{5.29}$$

Soit maintenant u tel que $u \to w$; si $u' \neq u$ est un autre élément qui vérifie $u' \to w$ alors $u \not\leqslant u'$ donc $S_{u'}|_u = 0$. En prenant donc la restriction à u dans la formule (5.28) on obtient

$$\begin{aligned} c^u_{\mathrm{div}_i\, w} S_u|_u &= S_{\mathrm{div}_i}|_u S_w|_u - c^w_{\mathrm{div}_i\, w} S_w|_u = S_{\mathrm{div}_i}|_u S_w|_u - S_{\mathrm{div}_i}|_w S_w|_u \\ &= (S_{\mathrm{div}_i}|_u - S_{\mathrm{div}_i}|_w) S_w|_u. \end{aligned} \tag{5.30}$$

On voit donc que pour déterminer les coefficients de la décomposition (5.28) on doit connaître explicitement les classes S_{div_i} ainsi que la restriction d'une classe arbitraire S_w aux points u tels que $u \to w$.

En s'inspirant de la formule donnée par Knutson et Tao dans [KT03, §3] pour la classe équivariante du diviseur de Schubert d'une grassmannienne, on « devine » les formules suivantes :

Proposition 5.3.33. *Si $\omega_i = \varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_i$, $0 \leqslant i \leqslant 2n$ sont les poids fondamentaux alors pour tout $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ on a*

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{div}_i}|_w &= w_0(\omega_{i-1}) - w(\omega_{i-1}), \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1, \\ S_{\mathrm{div}_n}|_w &= w_0(\omega_n) - w(\omega_n), \end{aligned}$$

respectivement

$$S_{\mathrm{div}_{n+1}}|_w = w(\varepsilon_n) - w_0(\varepsilon_n).$$

PREUVE. On utilise la caractérisation de la proposition 5.3.10 pour montrer que les classes définies par les formules précédentes coïncident avec les classes S_{div_i}.

Notons d'abord que ces formules définissent bien des éléments de $H^*_T(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$; en effet, les trois définissent des éléments de la forme $P_w = w(P) - w_0(P)$ (au signe près) où P est un polynôme, donc pour toute racine α on a $P_{\sigma_\alpha w} - P_w = \sigma_\alpha w(P) - w(P)$ qui est divisible par α, donc les conditions GKM sont satisfaites.

Nous vérifions maintenant la condition de la proposition 5.3.10 qui porte sur les supports. Soit $1 \leqslant i \leqslant n-1$, on a

$$\begin{aligned} w_0(\omega_{i-1}) - w(\omega_{i-1}) = 0 &\iff \varepsilon_{w(0)} + \cdots + \varepsilon_{w(i-1)} = \varepsilon_{w_0(0)} + \cdots + \varepsilon_{w_0(i-1)} \\ &\iff \{w(0), \ldots, w(i-1)\} = \{w_0(0), \ldots, w_0(i-1)\} \end{aligned}$$

et la dernière condition signifie que les T-points fixes w et w_0 ont la même image par la projection canonique $\pi_i : \mathbb{F}_\omega(2n+1) \to G_\omega(i, 2n+1)$, $(V_1 \subset \cdots \subset V_{n+1}) \mapsto V_i$; or l'image de w_0 dans $G_\omega(i, 2n+1)$ est le point fixe $\mathbf{max}_{i,2n+1} = (\bar{\imath}, \ldots, \bar{2}, \bar{1})$ qui appartient à la cellule ouverte de $G_\omega(i, 2n+1)$. Il résulte que le support de la classe S_i définie par $S_i|_w = w_0(\omega_{i-1}) - w(\omega_{i-1})$ est inclus dans $\pi_i^{-1}(X_{\mathbf{div}})$ qui coïncide avec X_{div_i} (cf. le corollaire 5.2.12).

Le même raisonnement pour $i = n+1$ montre que la classe S_{n+1} donnée par $S_{n+1}|_w = w_0(\omega_n) - w(\omega_n)$ a son support dans $\pi_{n+1}^{-1}(X_{\mathbf{div}}) = X_{\mathrm{div}_n}$.

Enfin, $X_{\mathrm{div}_{n+1}}$ est le diviseur Sp_{2n+1}-stable de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ (cf. le corollaire 5.2.12) donc les points fixes qui n'appartiennent par à $X_{\mathrm{div}_{n+1}}$ sont les permutations signées $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ qui en notation en ligne ont 0 sur la dernière position, c'est-à-dire pour lesquelles $w(n) = 0$; pour celles-ci on a bien $w(\varepsilon_n) - w_0(\varepsilon_n) = 0$.

Il nous reste à vérifier maintenant les égalités de l'énoncé aux points fixes maximaux des supports. Pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$ on a $\mathrm{div}_i = \sigma_{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}} w_0$ donc $S_{\mathrm{div}_i}|_{\mathrm{div}_i} = -(\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1})$, qui coïncide bien avec $w_0(\omega_{i-1}) - \sigma_{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}} w_0(\omega_{i-1}) = -(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_i) + \sigma_{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_i)$. Pour $i = n$ on a $\mathrm{div}_n = \sigma_{2\varepsilon_n} w_0$ donc $S_{\mathrm{div}_n}|_{\mathrm{div}_n} = -2\varepsilon_n$ qui est égal à $w_0(\omega_{n+1}) - \sigma_{2\varepsilon_n} w_0(\omega_{n+1}) = (-\varepsilon_1 - \cdots - \varepsilon_n + \varepsilon_0) - \sigma_{2\varepsilon_n}(-\varepsilon_1 - \cdots - \varepsilon_n + \varepsilon_0)$. Finalement, $\mathrm{div}_{n+1} = \sigma_{\varepsilon_0 + \varepsilon_n} w_0$ donc $S_{\mathrm{div}_{n+1}}|_{\mathrm{div}_{n+1}} = -\varepsilon_0 - \varepsilon_n = \sigma_{\varepsilon_0 + \varepsilon_n}(\varepsilon_0) - \varepsilon_0 = \sigma_{\varepsilon_0 + \varepsilon_n} w_0(\varepsilon_n) - w_0(\varepsilon_n)$. ∎

Remarque 5.3.34. Pour la variété de drapeaux symplectiques $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$ les diviseurs de Schubert sont $X_{\mathrm{div}_i} = X_{\sigma_{\varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i} \tilde{w}_0}$, $1 \leqslant i \leqslant n+1$,[10] qui ont les descriptions géométriques :

$$X_{\mathrm{div}_i} = \{V_\bullet \mid V_i \cap E_{2n+2-i} \neq (0)\}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n+1.$$

On a donc $X_{\mathrm{div}_i} = \pi_i^{-1}(X_{\mathbf{div}})$ où $\pi_i : \mathbb{F}_\omega(2n+2) \to G_\omega(i, 2n+2)$ est la projection canonique $(V_1 \subset \cdots \subset V_{n+1}) \mapsto V_i$ et $X_{\mathbf{div}} \subset G_\omega(i, 2n+2)$ est le diviseur de Schubert. On vérifie alors que les classes équivariantes des diviseurs $X_{\mathrm{div}_i} \subset \mathbb{F}_\omega(2n+2)$ sont données par la formule :

$$\tilde{S}_{\mathrm{div}_i}|_w = \tilde{w}_0(\omega_{i-1}) - w(\omega_{i-1}), \qquad \text{pour tout } w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+2}), \text{ et tout } 1 \leqslant i \leqslant n+1. \quad (5.31)$$

Nous calculons maintenant la restriction $S_w|_u$ d'une classe équivariante S_w à un point u tel que $u \to w$; soit $\alpha \in \Delta_+$ telle que $w = \sigma_\alpha u$. Notons pour commencer que si α est une racine *simple* de Sp_{2n} alors par la proposition 5.3.21 on a $S_w = -\partial_\alpha S_u$ donc

$$S_w|_u = -\frac{S_u|_u - \sigma_\alpha(S_u|_w)}{\alpha} = -\frac{S_u|_u}{\alpha}.$$

Pour calculer $S_w|_u$ lorsque α est quelconque nous allons nous servir du résultat suivant, valable pour tout groupe de Weyl d'un groupe semi-simple complexe (cf. [BGG73, 2.2] ou [Bou68]) :

[10] Comme $n+1 = \bar{n}$ ceci donne $X_{\mathrm{div}_{n+1}} = X_{\sigma_{2\varepsilon_n} \tilde{w}_0}$.

Lemme 5.3.35. *Soit $w \in W$ un élément du groupe de Weyl W et soit $w = \sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}\ldots\sigma_{\alpha_\ell}$ une décomposition réduite de w. Alors*

$$\{\alpha \in \Delta_+ \mid \sigma_\alpha w < w\} = \Delta_+ \cap w\Delta_- = \{\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}\ldots\sigma_{\alpha_{i-1}}(\alpha_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant \ell\}.$$

On a alors :

Proposition 5.3.36. *Soit w et u dans $W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ tels que $u \to w$, $w = \sigma_\alpha u$, $\alpha \in \Delta_+$, alors*

$$S_w|_u = -\frac{S_u|_u}{\alpha}.$$

Preuve. Nous démontrons d'abord l'assertion analogue pour les classes de Schubert équivariantes $\tilde{S}_w$ et $\tilde{S}_u$ de $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$ et nous en déduirons après la formule de l'énoncé.

Soit $w = \sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}\ldots\sigma_{\alpha_\ell}$ une décomposition réduite de w, d'après le lemme 5.3.35 il existe $1 \leqslant i \leqslant \ell$ tel que $\alpha = \sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}\ldots\sigma_{\alpha_{i-1}}(\alpha_i)$. Nous raisonnons par récurrence sur i ; si $i = 1$ alors $\alpha = \alpha_1$ est simple et donc on est dans le cas discuté ci-dessus, avant le lemme 5.3.35. Supposons donc $i \geqslant 2$. Notons que

$$\begin{aligned} u &= \sigma_\alpha w \\ &= \sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}\ldots\sigma_{\alpha_{i-1}}\sigma_{\alpha_i}\sigma_{\alpha_{i-1}}\ldots\sigma_{\alpha_2}\sigma_{\alpha_1} w \\ &= \sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}\ldots\sigma_{\alpha_{i-1}}\sigma_{\alpha_{i+1}}\sigma_{\alpha_{i+2}}\ldots\sigma_{\alpha_\ell} \end{aligned}$$

et ceci est une décomposition réduite de u.

Soit $w_1 = \sigma_{\alpha_1} w$ et $u_1 = \sigma_{\alpha_1} u$. Alors $w_1 = \sigma_{\alpha_2}\sigma_{\alpha_3}\ldots\sigma_{\alpha_\ell}$ est une décomposition réduite de w_1 et $u_1 = \sigma_{\alpha_2}\ldots\sigma_{\alpha_{i-1}}\sigma_{\alpha_{i+1}}\ldots\sigma_{\alpha_\ell}$ est une décomposition réduite de u_1. On a donc $u_1 \to w_1$ et $w_1 = \sigma_{\sigma_{\alpha_1}(\alpha)} u_1$ c'est-à-dire

$$\begin{tikzcd} & w & \\ u \arrow[ur, "\alpha"] & & w_1 \arrow[ul, "\alpha_1"'] \\ & u_1 \arrow[ul, "\alpha_1"] \arrow[ur, "\sigma_{\alpha_1}(\alpha)"'] & \end{tikzcd}$$

et comme $\sigma_{\alpha_1}(\alpha) = \sigma_{\alpha_2}\sigma_{\alpha_3}\ldots\sigma_{\alpha_{i-1}}(\alpha_i)$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $u_1 \to w_1$. On a donc

$$\tilde{S}_{w_1}|_{u_1} = -\frac{\tilde{S}_{u_1}|_{u_1}}{\sigma_{\alpha_1}(\alpha)}.$$

Par ailleurs, comme $\tilde{S}_u = \partial_{\alpha_1}\tilde{S}_{u_1}$ on a

$$\tilde{S}_u|_u = -\frac{\tilde{S}_{u_1}|_u - \sigma_{\alpha_1}(\tilde{S}_{u_1}|_{u_1})}{\alpha_1} = \frac{\sigma_{\alpha_1}(\tilde{S}_{u_1}|_{u_1})}{\alpha_1}.$$

Il en résulte alors, comme $\tilde{S}_w = \partial_{\alpha_1}\tilde{S}_{w_1}$,

$$\begin{aligned} \tilde{S}_w|_u &= -\frac{\tilde{S}_{w_1}|_u - \sigma_{\alpha_1}(\tilde{S}_{w_1}|_{u_1})}{\alpha_1} = \frac{\sigma_{\alpha_1}(\tilde{S}_{w_1}|_{u_1})}{\alpha_1} \\ &= \frac{\sigma_{\alpha_1}(-\frac{\tilde{S}_{u_1}|_{u_1}}{\sigma_{\alpha_1}(\alpha)})}{\alpha_1} = -\frac{\sigma_{\alpha_1}(\tilde{S}_{u_1}|_{u_1})}{\alpha\alpha_1} \\ &= -\frac{\tilde{S}_u|_u}{\alpha}. \end{aligned}$$

La formule de l'énoncé est donc vérifiée pour les classes $\tilde{S}_w$ de $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$.

Maintenant, si l'on désigne par $e_T = e_T(\mathbb{F}_\omega(2n+1), \mathbb{F}_\omega(2n+2))$ la classe d'Euler équivariante de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ dans $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$, alors par la proposition 5.3.12, on a $\tilde{S}_w|_u = S_w|_u \cdot e_T|_u$ respectivement $\tilde{S}_u|_u = S_u|_u \cdot e_T|_u$, donc

$$S_w|_u = -\frac{S_u|_u}{\alpha}$$

ce qui achève la preuve. ■

En utilisant cette proposition dans la formule (5.30) on obtient

$$c^u_{\mathrm{div}_i\, w} = \frac{S_{\mathrm{div}_i}|_w - S_{\mathrm{div}_i}|_u}{\alpha}. \tag{5.32}$$

On a alors la formule de type Chevalley-Pieri suivante pour la variété de drapeaux symplectiques impaire $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$:

Proposition 5.3.37. *Pour tout $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ on a*

$$\begin{aligned}
S_{\mathrm{div}_i} S_w &= (w_0(\omega_{i-1}) - w(\omega_{i-1}))S_w + \sum_{\substack{u \to w \\ w = \sigma_\alpha u}} \langle \omega_{i-1}, u^{-1}(\alpha^\vee)\rangle S_u, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\
S_{\mathrm{div}_n} S_w &= (w_0(\omega_n) - w(\omega_n))S_w + \sum_{\substack{u \to w \\ w = \sigma_\alpha u}} \langle \omega_n, u^{-1}(\alpha^\vee)\rangle S_u, \\
S_{\mathrm{div}_{n+1}} S_w &= (w(\varepsilon_n) - \varepsilon_0)S_w + \sum_{\substack{u \to w \\ w = \sigma_\alpha u}} -\langle \varepsilon_n, u^{-1}(\alpha^\vee)\rangle S_u,
\end{aligned}$$

où $\alpha^\vee$ est la coracine de α et $\langle\ ,\ \rangle$ est le crochet canonique $\mathfrak{t}^* \otimes \mathfrak{t} \to \mathbb{C}$.

PREUVE. Si α est une racine alors $\sigma_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee\rangle\alpha$, pour tout $\lambda \in \mathfrak{t}^*$.

Pour $u \to w$, $w = \sigma_\alpha w$, par la proposition 5.3.33 et la formule (5.32) ci-dessus, on a :

$$\begin{aligned}
c^u_{\mathrm{div}_i\, w} &= \frac{u(\omega_{i-1}) - w(\omega_{i-1})}{\alpha} = \frac{u(\omega_{i-1}) - \sigma_\alpha u(\omega_{i-1})}{\alpha} \\
&= \langle u(\omega_{i-1}), \alpha^\vee\rangle = \langle \omega_{i-1}, u^{-1}(\alpha^\vee)\rangle, \quad \text{si } 1 \leqslant i \leqslant n-1
\end{aligned}$$

respectivement

$$c^u_{\mathrm{div}_n\, w} = \frac{u(\omega_n) - w(\omega_n)}{\alpha} = \langle \omega_n, u^{-1}(\alpha^\vee)\rangle$$

et

$$\begin{aligned}
c^u_{\mathrm{div}_{n+1}\, w} &= \frac{w(\varepsilon_n) - u(\varepsilon_n)}{\alpha} = \frac{\sigma_\alpha u(\varepsilon_n) - u(\varepsilon_n)}{\alpha} \\
&= -\langle u(\varepsilon_n), \alpha^\vee\rangle = -\langle \varepsilon_n, u^{-1}(\alpha^\vee)\rangle.
\end{aligned}$$

En remplaçant ceci dans la formule (5.28) on obtient le résultat voulu. ■

Remarque 5.3.38. Pour la variété de drapeaux symplectiques $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$, la formule analogue de la formule (5.28) où l'on remplace les classes S_w par les classes $\tilde{S}_w$ est vraie ; de même on a vu dans le cours de la démonstration de la proposition 5.3.36 que cette proposition est vraie pour les classes $\tilde{S}_w$. En utilisant alors la formule pour la classe d'un diviseur de Schubert (5.31), on obtient la formule de Chevalley-Pieri équivariante pour $\mathbb{F}_\omega(2n+2)$:

$$\tilde{S}_{\mathrm{div}_i}\tilde{S}_w = (\tilde{w}_0(\omega_{i-1}) - w(\omega_{i-1}))\tilde{S}_w + \sum_{\substack{u\to w\\ w=\sigma_\alpha u}} \langle \omega_{i-1}, u^{-1}(\alpha^\vee)\rangle \tilde{S}_u.$$

5.3.5 Présentation de Borel de $H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$ et cohomologie ordinaire de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$

5.3.39. Nous avons déjà remarqué au n° 5.2.1 que $H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1)) \simeq S \otimes_{S^{W(\mathrm{Sp}_{2n+2})}} S$ et que le morphisme de restriction $H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+2)) \to H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$ est surjectif, on obtient donc que le morphisme composé

$$S\otimes S \longrightarrow H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+2)) \longrightarrow H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$$

est surjectif. Nous allons calculer le noyau de ce morphisme et déterminer ainsi une présentation à la Borel de l'anneau de cohomologie équivariante $H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$; nous verrons ensuite quelles conséquences ceci a pour l'anneau de cohomologie ordinaire de $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$.

Le noyau du morphisme $S\otimes S \to H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+2))$ est l'idéal de $S\otimes S$ engendré par les éléments de la forme $1\otimes P - P\otimes 1$ avec $P \in S^{W(\mathrm{Sp}_{2n+2})}$. Nous déterminons maintenant le noyau du morphisme de restriction $H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+2)) \to H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$.

Sur l'anneau $\oplus_{w\in W(\mathrm{Sp}_{2n+2})}S$ il y a une deuxième action du groupe de Weyl $W(\mathrm{Sp}_{2n+2})$ qui est définie par

$$(w * P)_{w'} = P_{w'w}, \qquad w, w' \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1}). \tag{5.33}$$

Puisqu'elle est définie à partir de l'action de $W(\mathrm{Sp}_{2n+2})$ sur lui-même par multiplication à droite, cette action préserve les conditions GKM et stabilise donc le sous-anneau $H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+2)) \subset \oplus_{w\in W(\mathrm{Sp}_{2n+2})}S$.

Une classe $P \in H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+2))$ est dans le noyau du morphisme de restriction $H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+2)) \to H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$ si et seulement si $P|_w = 0$ pour tout $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$. On a remarqué au n° 3.2.19 que la multiplication par le plus grand élément $\tilde{w}_0 = \bar{0}\bar{1}\ldots\bar{n}$ définit une involution de $W(\mathrm{Sp}_{2n+2})$ qui envoie $W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ sur son complémentaire $W(\mathrm{Sp}_{2n+2}) \setminus W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$. On obtient donc que

$$\forall w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+2}) \setminus W(\mathrm{Sp}_{2n+1}) \ : P|_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)} = 0 \iff (\tilde{w}_0 * P)|_w = 0,$$

autrement dit $P|_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)} = 0$ si et seulement si $\tilde{w}_0 * P$ a son support dans $W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$.

Lemme 5.3.40. *Soit $R \in H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+2))$ une classe qui a son support dans $W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$. Alors R est divisible par $[\mathbb{F}_\omega(2n+1)]_T = \tilde{S}_{w_0}$.*

Preuve. Par la proposition 5.3.12, $R|_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)}$ est divisible dans $H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$ par la classe d'Euler équivariante $e_T(\mathbb{F}_\omega(2n+1), \mathbb{F}_\omega(2n+2)) = \tilde{S}_{w0}|_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)}$. Soit $Q \in H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$ tel que $R|_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)} = Q\tilde{S}_{w0}|_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)}$. Puisque le morphisme de restriction $H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+2)) \to H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$ est surjectif, il existe $\tilde{Q} \in H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+2))$ tel que $\tilde{Q}|_{\mathbb{F}_\omega(2n+1)} = Q$; alors

$R = \tilde{Q}\tilde{S}_{\tilde{w}_0}$. En effet il suffit de vérifier que $R|_w = \tilde{Q}|_w\tilde{S}_{w_0}|_w$ pour tout $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+2})$; pour $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ ceci est vrai par la définition de $\tilde{Q}$, et pour $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+2}) \setminus W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$, $R|_w$ et $\tilde{S}_{w_0}|_w$ sont toutes les deux nulles. ∎

Autrement dit l'ensemble des classes de $H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+2))$ qui ont le support dans $W(\mathrm{Sp}_{2n+1})$ est l'idéal principal de $H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$ engendré par $\tilde{S}_{w_0}$. On en déduit aussitôt :

Proposition 5.3.41. *Le noyau du morphisme de restriction $H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+2)) \to H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$ est l'idéal principal de $H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+2))$ engendré par l'élément $\tilde{w}_0 * \tilde{S}_{w_0}$.*

Par la définition de l'action $*$ et par la remarque 5.3.14 l'élément $\tilde{w}_0 * \tilde{S}_{w_0}$ est donné par

$$(\tilde{w}_0 * \tilde{S}_{w_0})|_w = \prod_{i=0}^{n}(\varepsilon_0 - w(\varepsilon_i)), \qquad w \in W(\mathrm{Sp}_{2n+2}).$$

Par la formule (5.8), $\tilde{w}_0 * \tilde{S}_{w_0}$ est l'image de l'élément de $S \otimes S$

$$K = \prod_{i=0}^{n}(1 \otimes \varepsilon_0 - \varepsilon_i \otimes 1).$$

Le noyau du morphisme $S \otimes S \to H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$ est donc l'idéal engendré par K et par les éléments $1 \otimes P - P \otimes 1$, où P est l'un des invariants $e_i(\varepsilon_0^2, \ldots, \varepsilon_n^2)$, $1 \leqslant i \leqslant n+1$, du groupe de Weyl $W(\mathrm{Sp}_{2n+2})$ (cf. le n° 3.2.17).

5.3.42. Puisque $\mathbb{F}_\omega(2n+1)$ est un espace équivariant formel, l'anneau de cohomologie ordinaire $H^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$ est

$$H^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1)) \simeq H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))/(S_+ \cdot H_T^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))).$$

L'anneau $H^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1))$ est donc isomorphe au quotient de $S \otimes S/(S_+ \cdot S \otimes S) \simeq S$ par l'idéal I engendré par les images de K et des $1 \otimes e_i(\varepsilon_0^2, \ldots, \varepsilon_n^2) - e_i(\varepsilon_0^2, \ldots, \varepsilon_n^2) \otimes 1$, $1 \leqslant i \leqslant n+1$. Ces images sont $\varepsilon_0\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$ et respectivement, les invariants $e_i(\varepsilon_0^2, \ldots, \varepsilon_n^2)$, $1 \leqslant i \leqslant n+1$. On peut prendre donc comme générateurs de I les éléments $\varepsilon_0\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$ et $e_i(\varepsilon_0^2, \ldots, \varepsilon_n^2)$, $1 \leqslant i \leqslant n$ qui sont les invariants basiques du groupe de Weyl de type D_{n+1}. Il résulte :

Proposition 5.3.43. *La variété de drapeaux symplectiques impaire a la même algèbre de cohomologie que la variété de drapeaux de type D_{n+1} :*

$$H^*(\mathbb{F}_\omega(2n+1)) \simeq H^*(\mathbb{F}_Q(2n+2)).$$

Annexe A

Rappels sur le groupe symplectique et ses variétés homogènes projectives

A.1 Définitions de base

A.1.1. Soit F un espace vectoriel complexe et $\omega : F \times F \to \mathbb{C}$ une forme *symplectique* sur F, c'est à dire une forme bilinéaire, antisymétrique et non dégénérée. Alors F est de dimension nécessairement *paire* (on posera $\dim F = 2n$) et pour tout sous-espace vectoriel V de F son *orthogonal*

$$V^{\perp} = \{x \in F \,|\, \omega(x, y) = 0, \text{ pour tout } y \in V\}$$

est de dimension $\dim F - \dim V$. Un sous-espace *isotrope* relativement à ω est un sous-espace $V \subset F$ tel que $\omega(x, y) = 0$, pour tous $x, y \in V$. On appellera *lagrangien* un sous-espace isotrope de dimension maximale ; un sous-espace lagrangien est donc un sous-espace isotrope de dimension n. Une *base symplectique* est une base $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ de E telle que

$$\omega(e_i, e_j) = \delta_{i,2n+1-j}, \qquad \text{pour tous } 1 \leqslant i < j \leqslant n.$$

Une convention standard, que nous adoptons aussi, est d'introduire la notation suivante :

Notation A.1.2. Pour chaque $i \in \{1, \ldots, 2n\}$, on note $\bar{\imath} = 2n + 1 - i$; ainsi $i \mapsto \bar{\imath}$ est une involution de l'ensemble $\{1, \ldots, 2n\}$.

Une base symplectique est donc une base $\{e_1, \ldots, e_n, e_{\bar{n}}, \ldots, e_{\bar{1}}\}$ telle que $\omega(e_i, e_{\bar{\jmath}}) = \delta_{ij}$ pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Dans une base symplectique la matrice de ω est

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \tag{A.1}$$

On démontre facilement que F possède une base symplectique ; le choix d'une telle base identifie (F, ω) à $\mathbb{C}^{2n}$ muni de la *forme symplectique canonique* donnée par

$$\omega(x, y) = \sum_{i=1}^{n} (x_i y_{\bar{\imath}} - x_{\bar{\imath}} y_i), \qquad x, y \in \mathbb{C}^{2n}.$$

A.1.3. Le *groupe symplectique* est le groupe des transformations linéaires de F qui préservent ω :

$$\mathrm{Sp}(F,\omega) = \{g \in \mathrm{GL}(F) \mid \omega(gx,gy) = \omega(x,y), \text{ pour tous } x,y \in F\}.$$

Par le choix d'une base symplectique il s'identifie au groupe de matrices

$$\mathrm{Sp}_{2n} = \{g \in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{C}) \mid {}^t gJg = J\}.$$

Soit $\{e_1,\dots,e_{2n}\}$ une base symplectique et soit $E_\bullet = (E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_{2n})$ le drapeau défini par $E_i = \langle e_1,\dots,e_i\rangle$, $1 \leqslant i \leqslant 2n$ (on dit que $\{e_1,\dots,e_{2n}\}$ est une *base adaptée* pour le drapeau $E_\bullet$).

Proposition A.1.4. *Le sous-groupe B de Sp_{2n} qui préserve le drapeau $E_\bullet$, c'est-à-dire le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de Sp_{2n}, est un sous-groupe de Borel de Sp_{2n}. Le sous-groupe T de Sp_{2n} formé par les matrices diagonales dans la base $\{e_1,\dots,e_{2n}\}$ est un tore maximal.*

On a donc

$$T = \{\mathrm{diag}(t_1,\dots,t_n,t_n^{-1},\dots,t_1^{-1}) \mid t_1,\dots,t_n \in \mathbb{C}^*\},$$

où $\mathrm{diag}(x_1,\dots,x_{2n})$ désigne la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $x_1,\dots,x_{2n}$.

Soient $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{2n}$ les caractères $\varepsilon_i : \mathrm{diag}(x_1,\dots,x_{2n}) \mapsto x_i$ du tore maximal de $\mathrm{GL}(2n,\mathbb{C})$ formé par les matrices diagonales dans la base $\{e_1,\dots,e_{2n}\}$. Alors T est le sous-tore donné par les équations

$$\varepsilon_i = -\varepsilon_{\bar{\imath}}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

et les caractères $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ forment une base du groupe des caractères de T.

A.1.5. L'algèbre de Lie du groupe Sp_{2n} est la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_{2n}$,

$$\mathfrak{sp}_{2n} = \{X \in \mathfrak{gl}_{2n} \mid {}^t XJ + JX = 0\},$$

donc on a $X = (x_{ij}) \in \mathfrak{sp}_{2n}$ si et seulement si

$$x_{ij} = -x_{\bar{\jmath}\bar{\imath}},\ x_{i\bar{\jmath}} = x_{j\bar{\imath}},\ x_{\bar{\imath}j} = x_{\bar{\jmath}i}, \qquad \text{pour tous} 1 \leqslant i,j \leqslant n.$$

Si E_{ij} désigne la matrice élémentaire $E_{ij} = (x_{kl})$, $x_{k\ell} = \delta_{ik}\delta_{j\ell}$, notons

$$\begin{aligned} &X_{ij} = E_{ij} - E_{\bar{\jmath}\bar{\imath}}, \text{ pour } 1 \leqslant i,j \leqslant n, \text{ et} \\ &X_{i\bar{\jmath}} = E_{i\bar{\jmath}} + E_{j\bar{\imath}},\ \ X_{\bar{\imath}j} = E_{\bar{\imath}j} + E_{\bar{\jmath}i}, \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\ ; \end{aligned}$$

ces éléments engendrent $\mathfrak{sp}_{2n}$.

La sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{t}$ des matrices diagonales de $\mathfrak{sp}_{2n}$ admet comme base l'ensemble $\{X_{ii} \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$. La sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ formée par les matrices triangulaires supérieures de $\mathfrak{sp}_{2n}$ a une base donnée par les éléments $X_{ij}, X_{i\bar{\jmath}}$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$.

Les racines de Sp_{2n} sont les

$$\begin{aligned} &\pm(\varepsilon_i - \varepsilon_j), \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n \\ &\pm(\varepsilon_i + \varepsilon_j), \quad 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n. \end{aligned}$$

Alors, pour $1 \leqslant k \neq \ell \leqslant 2n$, l'espace propre correspondant à la racine $\varepsilon_k - \varepsilon_\ell$ est $\mathbb{C}X_{k\ell}$. En particulier les racines qui sont des T-poids de $\mathfrak{b}$, et que l'on prend d'habitude comme racines positives, sont les $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $\varepsilon_i + \varepsilon_j$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$.

A.1.6. Le groupe de Weyl $W(\mathrm{Sp}_{2n})$ du groupe symplectique Sp_{2n} est le groupe des transformations linéaires de $\mathbb{C}^{2n}$ qui permutent les vecteurs e_i de la base et qui commutent avec la matrice J ; en d'autres termes $W(\mathrm{Sp}_{2n})$ s'identifie au groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, 2n\}$ qui commutent avec l'involution $i \mapsto \bar{\imath}$:

$$W(\mathrm{Sp}_{2n}) = \{w \in S_{2n} \mid w(\bar{\imath}) = \overline{w(i)}\}. \tag{A.2}$$

Tout élément de $W(\mathrm{Sp}_{2n})$ est donc déterminé par ses valeurs sur le sous-ensemble $\{1, \dots, n\}$. Pour représenter un élément w de $W(\mathrm{Sp}_{2n})$, on utilise la notation *en ligne* qui consiste à juxtaposer les valeurs $w(1), w(2), \dots, w(n)$, avec la convention d'écrire tout nombre $j \geqslant n+1$ comme $\bar{\imath}$ avec $i = \bar{\jmath} \leqslant n$. Via l'identification (A.2) ci-dessus, $W(\mathrm{Sp}_{2n})$ agit sur $\mathbb{C}^{2n}$ par

$$w.e_i = e_{w(i)}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant 2n,\ w \in W(\mathrm{Sp}_{2n})$$

et sur les caractères de T par

$$w.\varepsilon_i = \varepsilon_{w(i)}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,\ w \in W(\mathrm{Sp}_{2n}).$$

En particulier, comme $\varepsilon_{\bar{\imath}} = -\varepsilon_i$, les « barres » dans la notation en ligne d'un élément $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n})$ correspondent à des changements de signe dans l'action sur les caractères, et $W(\mathrm{Sp}_{2n})$ s'identifie ainsi aux *permutations signées* des $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$.

Les réflexions associées aux racines de Sp_{2n} agissent de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\sigma_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} :&\quad i \mapsto j,\ \ j \mapsto i,\ \ k \mapsto k, \quad \text{pour } k \neq i, j\\
\sigma_{\varepsilon_i + \varepsilon_j} :&\quad i \mapsto \bar{\jmath},\ \ j \mapsto \bar{\imath},\ \ k \mapsto k, \quad \text{pour } k \neq i, j\\
\sigma_{2\varepsilon_i} :&\quad i \mapsto \bar{\imath},\ \ k \mapsto k, \quad \text{pour } k \neq i
\end{aligned}$$

Le groupe $W(\mathrm{Sp}_{2n})$ est un groupe de Coxeter engendré par les réflexions correspondant aux racines simples ; la *longueur* $\ell(w)$ d'un élément w est alors le nombre minimum de réflexions simples nécessaires pour exprimer w.

Le plus grand élément de $W(\mathrm{Sp}_{2n})$ est $\bar{1}\bar{2}\dots\bar{n}$; sa longueur est n^2.

A.1.7. La *grassmannienne symplectique* $G_\omega(k, F)$ est l'ensemble des sous-espaces isotropes de dimension k de F ; c'est un fermé de la grassmannienne $G(k, F)$ des sous-espaces de dimension k de F. Plus généralement pour une suite d'entiers $1 \leqslant d_1 < d_2 < \dots d_k \leqslant n$, on considère la *variété de drapeaux isotropes*

$$\mathbb{F}_\omega(d_1, \dots, d_k, F) = \{(V_{d_1} \subset \dots \subset V_{d_k}) \mid \dim V_{d_i} = d_i,\ V_{d_i} \text{ isotrope, pour tout} 1 \leqslant i \leqslant k\}.$$

Lorsque $\{d_1, \dots, d_k\} = \{1, \dots, n\}$, on note plus simplement

$$\mathbb{F}_\omega(F) = \mathbb{F}_\omega(1, \dots, n, F)$$

et on appelle $\mathbb{F}_\omega(F)$ la *variété de drapeaux symplectiques.*

Ces variétés sont munies naturellement d'une action du groupe symplectique ; pour chacun des exemples énumérés, cette action est transitive. Réciproquement, toute variété projective qui est homogène pour une action du groupe symplectique est l'une des variétés de drapeaux isotropes. Dans la liste ci-dessus, la variété de drapeaux symplectiques $\mathbb{F}_\omega(F)$ s'identifie à l'espace homogène Sp_{2n}/B ; c'est la variété projective Sp_{2n}-homogène maximale. À l'autre extrême, les grassmanniennes symplectiques $G_\omega(k, F)$ sont les espaces homogènes de la forme Sp_{2n}/P_k où $P_k \subset \mathrm{Sp}_{2n}$ est un sous-groupe parabolique maximal.

A.2 Cellules et variétés de Schubert

On fixe dans $F = \mathbb{C}^{2n}$ une base symplectique $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$ et le drapeau $E_\bullet = (E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_{2n})$, $E_i = \langle e_1, \dots, e_i \rangle$.

A.2.1 Dans la grassmannienne symplectique $G_\omega(k, 2n)$

A.2.1. Soit $V \subset F$ un sous-espace isotrope de dimension k ; l'incidence de V avec le drapeau $E_\bullet$ est décrite par les entiers $r_i = \dim(V \cap \langle e_1, \dots, e_i \rangle)$. Dans la suite

$$0 = r_0 \leqslant r_1 \leqslant \cdots \leqslant r_{2n-1} \leqslant r_{2n} = k,$$

la différence de deux termes consécutifs est d'au plus une unité, donc il y a exactement k sauts égaux à 1 ; notons $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ leurs positions

$$i_\alpha = \min\{i \mid 1 \leqslant i \leqslant 2n,\ r_i = \alpha\}, \qquad 1 \leqslant \alpha \leqslant k.$$

On appelle le multi-indice $I = (1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant 2n)$, le *type d'incidence* de V avec le drapeau $E_\bullet$. Un multi-indice I qui est le type d'incidence d'au moins un sous-espace isotrope de dimension k sera appelé *admissible*. Les indices admissibles sont précisément les indices $I = (1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant 2n)$ qui vérifient $i_\alpha \neq \overline{i_\beta}$ pour tous $1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant k$.

Notation A.2.2. On note $\mathbf{I}_{k,2n}$ l'ensemble des indices $(1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant 2n)$ et $\mathbf{I}^\omega_{k,2n}$ l'ensemble des indices admissibles de $\mathbf{I}_{k,2n}$, c'est-à-dire $\mathbf{I}^\omega_{k,2n} = \{(1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant 2n) \mid i_\alpha \neq \overline{i_\beta},\ \text{pour tous } 1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant k\}$.[1]

La *cellule de Schubert* associée à un indice admissible $I \in \mathbf{I}^\omega_{k,2n}$ est l'ensemble des sous-espaces isotropes de dimension k qui ont le type d'incidence I :

$$C_I = \Big\{V \in G_\omega(k, F) \,\Big|\, \dim(V \cap \langle e_1, \dots, e_i \rangle) = \alpha,\ \ i_\alpha \leqslant i < i_{\alpha+1},\ 1 \leqslant \alpha \leqslant k\Big\},$$

où l'on pose par convention $i_{k+1} = 2n + 1$. On a donc

$$G_\omega(k, F) = \bigcup_{I \in \mathbf{I}^\omega_{k,2n}} C_I.$$

La *variété de Schubert* X_I est par définition l'adhérence $\overline{C_I}$.

A.2.3. Soit $V \in C_I$ un sous-espace de type d'incidence I ; alors $0 \subset (V \cap E_{i_1}) \subset (V \cap E_{i_2}) \subset \cdots \subset (V \cap E_{i_k}) = V$ est un drapeau complet de V. Si $\{v_1, \dots, v_k\}$ est une base de V adaptée à ce drapeau alors $v_\alpha \in \langle e_1, \dots, e_{i_\alpha} \rangle \setminus \langle e_1, \dots, e_{i_\alpha - 1} \rangle$ pour tout $1 \leqslant \alpha \leqslant k$, donc si $v_\alpha = \sum_i a_{\alpha i} e_i$ alors la matrice de taille $k \times 2n$ $(a_{\alpha i})$ est une matrice *échelon* de type I, c'est-à-dire que sur la ligne α le coefficient $a_{\alpha i_\alpha}$ est non nul et tous les coefficients situés à sa droite $a_{\alpha i}$, $i > i_\alpha$ sont nuls. La cellule de Schubert C_I est donc l'ensemble des sous-espaces isotropes de dimension k qui, par rapport à la base symplectique $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$, sont engendrés par les lignes d'une matrice échelon de type I.

[1] NB : ces notations sont reliés au choix de numérotation de la base symplectique qui a été fixée au départ ; ainsi lorsque l'on considère $\mathbb{C}^{2n+2}$ avec une base symplectique $\{e_0, \dots, e_{2n+1}\}$, on pose $\mathbf{I}_{k,2n+2} = \{(0 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant 2n+1)\}$, etc.

Une matrice échelon comme ci-dessus va être uniquement déterminée par le sous-espace engendré par ses lignes si on impose des contraintes supplémentaires. Plus précisément, V est engendré par les lignes d'une unique matrice $(a_{\alpha i})$ telle que pour tout α le coefficient $a_{\alpha i_\alpha}$ soit égal à 1, et tous les coefficients situés à sa droite, $a_{\alpha i}$, $i > i_\alpha$, et en dessous, $a_{\beta i_\alpha}$, $\beta > \alpha$, soient nuls :

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccc} & & i_1 & & & i_2 & & \dots & i_k & & \end{array} \\
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \\ \vdots \\ v_k \end{array} &
\left[\begin{array}{ccccccccccc}
* & \dots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
* & \dots & 0 & * & \dots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
* & \dots & 0 & * & \dots & 0 & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & & \\
* & \dots & 0 & * & \dots & 0 & * & \dots & 1 & 0 & \cdots
\end{array}\right]
\end{array}$$

La condition V isotrope impose des relations dans cette matrice. Plus précisément, tous les coefficients marqués par un «$*$» sont des paramètres indépendants, à l'exception des coefficients qui sont opposés[2] à une position où il existe un «1» placé sur une ligne supérieure (c'est-à-dire les coefficients de la forme $a_{\beta\overline{i_\alpha}}$ pour $1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant k$) qui sont déterminés et qu'on marque d'habitude par un «$\bullet$». Les coefficients libres sont alors des coordonnées affines qui établissent un isomorphisme entre C_I et l'espace affine $\mathbb{A}^{\dim C_I}$. En particulier, on obtient

$$\begin{aligned}
\dim C_I = \text{nombre de } * \ &= \sum_\alpha (i_\alpha - \alpha) - \text{nombre de } \bullet \\
&= \sum_\alpha i_\alpha - \frac{k(k+1)}{2} - \#\big\{(\alpha,\beta) \mid \alpha < \beta,\, i_\alpha + i_\beta > 2n+1\big\}.
\end{aligned} \tag{A.3}$$

La dernière expression est la *longueur* $\ell(I)$ de I, de sorte que l'on a $\dim C_I = \ell(I)$.

A.2.4. Les points fixes du tore maximal T dans $G_\omega(k,F)$ sont en bijection avec l'ensemble des indices admissibles $\mathbf{I}^\omega_{k,2n}$, le point fixe correspondant à un indice I étant le sous-espace $E_I = \langle e_{i_1}, \dots, e_{i_k} \rangle$. En particulier, chaque cellule de Schubert contient un unique T-point fixe.

Il existe un sous-tore à un paramètre γ qui a les mêmes points fixes que T (cf. [BB73, lemme 2.3] ; il suffit en fait de prendre γ tel que $\langle \gamma, \alpha \rangle > 0$ pour toute racine α positive). Alors les cellules de Schubert coïncident avec les cellules de Białynicki-Birula définies par γ dans chaque point fixe E_I :

$$C(E_I) = \{x \in G_\omega(k,F) \mid \lim_{z \to 0} \gamma(z).x = E_I\}.$$

L'incidence d'un sous-espace de F avec le drapeau $E_\bullet$ est préservée par l'action du sous-groupe de Borel B, donc les cellules de Schubert sont B-stables ; on montre en fait qu'elles sont des B-orbites.

A.2.5. Sur l'ensemble $\mathbf{I}_{k,2n}$ des indices $I = (1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant 2n)$ on définit une relation d'ordre par

$$I \leqslant J \iff i_\alpha \leqslant j_\alpha, \text{ pour tout } 1 \leqslant \alpha \leqslant k.$$

L'ordre induit sur le sous-ensemble $\mathbf{I}^\omega_{k,2n} \subset \mathbf{I}_{k,2n}$ des indices admissibles coïncide avec l'ordre de Bruhat sur l'ensemble des cellules de Schubert :

$$\forall I, J \in \mathbf{I}^\omega_{k,2n} : \qquad C_I \subset \overline{C_J} \iff I \leqslant J.$$

[2] Un coefficient $a_{\alpha i}$ est *opposée* au coefficient $a_{\alpha \bar{\imath}}$.

On obtient en particulier :

$$X_I = \bigcup_{J \leqslant I} C_J.$$

La sous-variété de Schubert $X_I = \overline{C_I}$ associée à un indice admissible $I \in \mathbf{I}^{\omega}_{k,2n}$ est caractérisée par

$$X_I = \{V \in G_\omega(k, F) \mid \dim(V \cap \langle e_1, \ldots, e_{i_\alpha}\rangle) \geqslant \alpha,\ \ 1 \leqslant \alpha \leqslant k\}.$$

Les éléments de X_I sont donc précisément les sous-espaces qui peuvent être engendrés relativement à la base $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ par les lignes d'une matrice $(a_{\alpha i})$ de taille $k \times 2n$ telle que $a_{\alpha i} = 0$ pour tous $i > i_\alpha$, $1 \leqslant \alpha \leqslant k$.

A.2.2 Dans la variété de drapeaux symplectiques $\mathbb{F}_\omega(2n)$

A.2.6. Pour une permutation signée $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n})$ on définit la fonction de rang r_w comme étant la fonction qui associe à une paire $(i, j) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, 2n\}$ le nombre

$$r_w(i, j) = \mathrm{card}\{k \mid k \leqslant i, w(k) \leqslant j\}.$$

L'entier $r_w(i, j)$ est donc le nombre de points du *graphe* de w

$$\{(k, w(k)) \mid 1 \leqslant k \leqslant n\}$$

situés dans le rectangle $\{1, \ldots, i\} \times \{1, \ldots, j\}$.

La *cellule de Schubert* de la variété de drapeaux symplectiques $\mathbb{F}_\omega(F)$ associée à une permutation signée $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n})$ est l'ensemble des drapeaux isotropes $V_\bullet = (V_1 \subset \cdots \subset V_n)$ qui vérifient

$$\dim(V_i \cap \langle e_1, \ldots, e_j\rangle) = r_w(i, j), \qquad \text{pour tout } 1 \leqslant i \leqslant n, \text{ et tout } 1 \leqslant j \leqslant 2n.$$

Si l'on compare avec la définition des cellules de Schubert pour les grassmanniennes symplectiques on constate que

$$V_\bullet \in C_w \iff V_i \in C_{\{w(1),\ldots,w(i)\}\uparrow}, \text{ pour tout } 1 \leqslant i \leqslant n$$

où $\{w(1), \ldots, w(i)\} \uparrow$ est l'indice admissible[3] obtenu en ordonnant de façon croissante les éléments de l'ensemble $\{w(1), \ldots, w(i)\}$.

A.2.7. Il résulte directement de la définition ci-dessus que la cellule de Schubert C_w associée à une permutation signée $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n})$ est l'ensemble des drapeaux qui admettent comme base adaptée les lignes d'une matrice (a_{ij}) de taille $n \times 2n$ telle que $a_{iw(i)=1}$ et $a_{ij} = 0$ pour tous $1 \leqslant i \leqslant n$, $j > w(i)$. On remarque que les coefficients qui sont toujours égaux à 1 correspondent aux points du graphe de w.

A.2.8. Le groupe de Weyl $W(\mathrm{Sp}_{2n})$ est muni de l'ordre de Bruhat défini comme suit : $w \leqslant w'$ si et seulement s'il existe une chaîne

$$w = w_1 \to w_2 \to \cdots \to w_d = w'$$

telle que pour chaque $1 \leqslant i \leqslant d-1$ on ait $\ell(w_{i+1}) = \ell(w_i) + 1$ et $w_{i+1} = \sigma_\alpha w_i$ pour une racine α.

[3]Le fait que c'est bien un indice admissible résulte de la définition (A.2).

L'ordre de Bruhat sur $W(\mathrm{Sp}_{2n})$ coïncide avec l'ordre induit par l'ordre de Bruhat des cellules de Schubert :

$$\forall w, w' \in W(\mathrm{Sp}_{2n}) \ : \qquad C_w \subset \overline{C_{w'}} \iff w \leqslant w'.$$

On a donc le *critère de Proctor*[4] (cf. [Pro82]) :

$$w \leqslant w' \iff \{w(1), \ldots, w(i)\} \uparrow \leqslant \{w'(1), \ldots, w'(i)\} \uparrow, \text{ pour tout } 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{A.4}$$

A.2.9. Les T-points fixes de $\mathbb{F}_\omega(F)$ sont en bijection avec le groupe de Weyl $W(\mathrm{Sp}_{2n})$ (une conséquence de la décomposition de Bruhat de Sp_{2n}, par exemple) ; à la permutation signée $w \in W(\mathrm{Sp}_{2n})$ correspond le T-point fixe $w(E_\bullet)$ qui est le drapeau dont une base adaptée est $\{e_{w(1)}, e_{w(2)}, \ldots, e_{w(n)}\}$.

Il existe un sous-tore à un paramètre γ (prendre γ tel que $\langle \gamma, \alpha \rangle > 0$ pour toute racine positive) qui a les mêmes points fixes que T ; alors les cellules de la décomposition de Białynicki-Birula de $\mathbb{F}_\omega(F)$ associée à γ coïncident avec les cellules de Schubert (ceci découle par exemple de la représentation matricielle des cellules de Schubert).

Enfin, comme pour les grassmanniennes symplectiques, les conditions d'incidence sont invariantes pour l'action du sous-groupe de Borel B, donc les cellules de Schubert sont B-stables ; elles sont en fait des B-orbites (par exemple, parce que chaque B-orbite contient un T-point fixe).

[4] Qui se démontre indépendamment de l'équivalence précédente.

Bibliographie

[AB84] M. F. Atiyah and R. Bott, *The moment map and equivariant cohomology*, Topology **23** (1984), no. 1, 1–28.

[Akh95] D. N. Akhiezer, *Lie group actions in complex analysis*, Aspects of Mathematics, E27, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1995.

[Ara89] A. Arabia, *Cohomologie T-équivariante de la variété de drapeaux d'un groupe de Kac-Moody*, Bull. Soc. Math. France **117** (1989), no. 2, 129–165.

[Ara98] ———, *Classes d'Euler équivariantes et points rationnellement lisses*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **48** (1998), no. 3, 861–912.

[BB73] A. Białynicki-Birula, *Some theorems on actions of algebraic groups*, Ann. of Math. (2) **98** (1973), 480–497.

[BGG73] I. N. Bernšteĭn, I. M. Gel′fand, and S. I. Gel′fand, *Schubert cells, and the cohomology of the spaces G/P*, Uspehi Mat. Nauk **28** (1973), no. 3(171), 3–26.

[Bou68] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV : Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V : Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI : systèmes de racines*, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1337, Hermann, Paris, 1968.

[Bre72] G. E. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, Academic Press, New York, 1972, Pure and Applied Mathematics, Vol. 46.

[Bri98] M. Brion, *Equivariant cohomology and equivariant intersection theory*, Representation theories and algebraic geometry (Montréal, PQ, 1997), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 514, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998, Notes by Alvaro Rittatore, pp. 1–37.

[Bri05] ———, *Lectures on the geometry of flag varieties*, Topics in cohomological studies of algebraic varieties, Trends Math., Birkhäuser, Basel, 2005, pp. 33–85.

[Dix74] J. Dixmier, *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars Éditeur, Paris-Brussels-Montreal, Que., 1974, Cahiers Scientifiques, Fasc. XXXVII.

[FH91] W. Fulton and J. Harris, *Representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 129, Springer-Verlag, New York, 1991, A first course, Readings in Mathematics.

[FP98] W. Fulton and P. Pragacz, *Schubert varieties and degeneracy loci*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1689, Springer-Verlag, Berlin, 1998, Appendix J by the authors in collaboration with I. Ciocan-Fontanine.

[GH78] Ph. Griffiths and J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978, Pure and Applied Mathematics.

[GKM98] M. Goresky, R. Kottwitz, and R. MacPherson, *Equivariant cohomology, Koszul duality, and the localization theorem*, Invent. Math. **131** (1998), no. 1, 25–83.

[GZ84] I. M. Gel′fand and A. V. Zelevinskiĭ, *Models of representations of classical groups and their hidden symmetries*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **18** (1984), no. 3, 14–31.

[Har77] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977, Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[Har95] J. Harris, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 133, Springer-Verlag, New York, 1995, A first course, Corrected reprint of the 1992 original.

[Hsi75] W. Hsiang, *Cohomology theory of topological transformation groups*, Springer-Verlag, New York, 1975, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 85.

[Hum75] J. E. Humphreys, *Linear algebraic groups*, Springer-Verlag, New York, 1975, Graduate Texts in Mathematics, No. 21.

[Hum78] ———, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 9, Springer-Verlag, New York, 1978, Second printing, revised.

[Hus94] D. Husemoller, *Fibre bundles*, third ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 20, Springer-Verlag, New York, 1994.

[KK86] B. Kostant and Sh. Kumar, *The nil Hecke ring and cohomology of G/P for a Kac-Moody group G*, Adv. in Math. **62** (1986), no. 3, 187–237.

[KT03] A. Knutson and T. Tao, *Puzzles and (equivariant) cohomology of Grassmannians*, Duke Math. J. **119** (2003), no. 2, 221–260.

[LS78] V. Lakshmibai and C. S. Seshadri, *Geometry of G/P. II. The work of de Concini and Procesi and the basic conjectures*, Proc. Indian Acad. Sci. Sect. A **87** (1978), no. 2, 1–54.

[LS91] ———, *Standard monomial theory*, Proceedings of the Hyderabad Conference on Algebraic Groups (Hyderabad, 1989) (Madras), Manoj Prakashan, 1991, pp. 279–322.

[MS74] J. W. Milnor and J. D. Stasheff, *Characteristic classes*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1974, Annals of Mathematics Studies, No. 76.

[Pro82] R. A. Proctor, *Classical Bruhat orders and lexicographic shellability*, J. Algebra **77** (1982), no. 1, 104–126.

[Pro86] ———, *Odd symplectic groups and combinatorics*, Lie algebras and related topics (Windsor, Ont., 1984), CMS Conf. Proc., vol. 5, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, pp. 357–360.

[Pro88] ———, *Odd symplectic groups*, Invent. Math. **92** (1988), no. 2, 307–332.

[Rob02] S. Robinson, *A Pieri-type formula for $H_T^*(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})/B)$*, J. Algebra **249** (2002), no. 1, 38–58.

[Sch76] W. M. Schmidt, *Equations over finite fields. An elementary approach*, Springer-Verlag, Berlin, 1976, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 536.

[Ser77] J.-P. Serre, *Cours d'arithmétique*, Presses Universitaires de France, Paris, 1977, Deuxième édition revue et corrigée, Le Mathématicien, No. 2.

[Sht93] V. V. Shtepin, *Intermediate Lie algebras and their finite-dimensional representations*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **57** (1993), no. 6, 176–198.

[Žel62] D. P. Želobenko, *Classical groups. Spectral analysis of finite-dimensional representations*, Uspehi Mat. Nauk **17** (1962), no. 1 (103), 27–120.